Le vélo à roues carrées

Pierre Lecomte

1 Introduction

Il est possible de rouler avec un vélo à roues carrées ! Il en existe un au lycée Schuré de Barr (Bas-Rhin, France). Le site http ://perso.wanadoo.fr/nvogel/ en présente une photo et illustre son fonctionnement par une animation.

Nous allons essayer de comprendre comment déterminer le profil de la route pour que le déplacement de la selle se fasse le long d'une droite. Nous allons voir que cette condition détermine la courbure du profil, comme fonction de l'abscisse curviligne puis nous en déduirons la forme de celui-ci, en appliquant le théorème selon lequel une courbe est déterminée à isométrie près par les fonctions de courbure et de torsion.

Les calculs seront menés pour un vélo dont la forme des roues est un polygone régulier.

Le problème du vélo à roues carrées est lié à la notion de "roulette", comme indiqué à cette adresse : http ://mathworld.wolfram.com/Roulette.html, où on trouvera également des animations illustrant le cas de diverses roues polygonales. (Cette référence m'a été communiquée par Michel B. sur le forum M@TH en Ligne.)

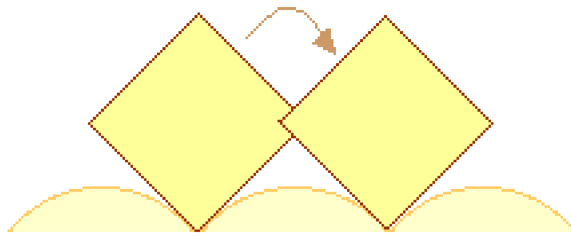

FIG. 1 – La longueur d'une arcade est égale à celle du côté de la roue.

2 Position du problème

On construit le profile de la route comme une succession d'arcades identiques. Comme la roue roule sans glisser, la longueur d'une arcade doit être égale à celle des côtés de la roue (voir figure 1).

A la jonction entre deux arcades, il faut, pour que le contact entre la route et la roue soit maintenu, que les tangentes aux arcades forment un angle égal à celui que font deux côtés consécutifs de la roue (voir figure 2).

Bien entendu, il faut aussi que le moyeu de la roue se déplace selon une droite (voir figure 3).

3 Courbure d'une arcade

Considérons le mouvement de la roue le long d'une arcade. La figure 4 illustre la situation. Le point de contact du côté de la roue avec la route est noté P. Le moyeu de la roue est M. On oriente l'arcade dans le sens du mouvement et on mesure l'abscisse curviligne s de P à partir du point de jontion P_0 de l'arcade avec l'arcade précédente. On note $\mathbf{t}, \mathbf{n}$ la tangente unitaire et la normale principale de l'arcade en P. Nous désignerons par a la moitié de la longueur du dôté de la roue et par b la distance du moyeu au côté. La position de M est donc

$$M = P + (a - s)\mathbf{t} - b\mathbf{n}.$$

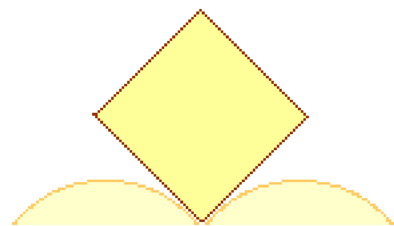

Fig. 2 – En une jonction, les tangentes aux arcades doivent faire un angle égal aux angles aux sommets de la roue.

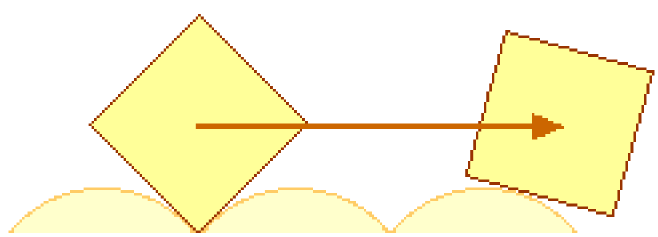

Fig. 3 – Le moyeu de la roue doit se déplacer le long d'une droite.

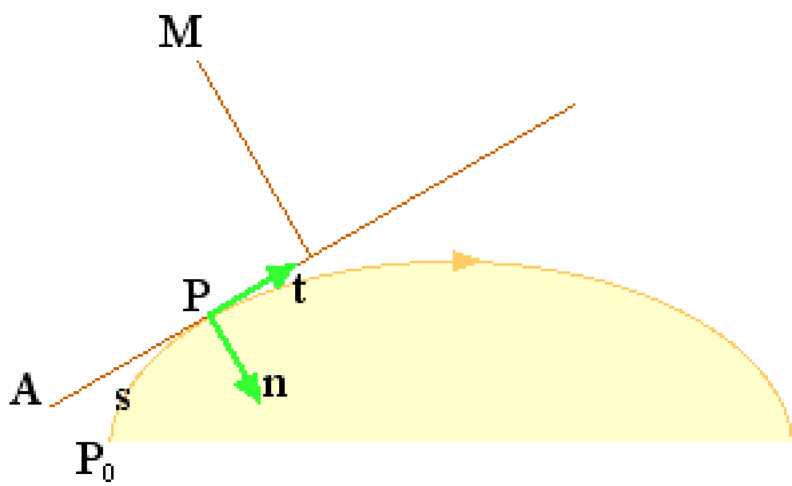

FIG. 4 – Position du moyeu.

En effet, puisque le mouvement se fait sans glissement, la longueur du segment AP est égale à la longueur de l'arc joignant P_0 à P.

Nous allons à présent imposer à M de se mouvoir le long d'une droite. Cela se traduit par le fait que le vecteur tangent unitaire de la courbe décrite par M est constant.

La dérivée de M par rapport à s est facile à calculer à l'aide des formules de Frenet. Puisque l'arcade est plane, sa torsion est nulle et nous avons : $\dot{\mathbf{t}} = \kappa\mathbf{n}$, $\dot{\mathbf{n}} = -\kappa\mathbf{t}$ où κ est la courbure (nous la supposons strictement positive, alors qu'elle pourrait s'annuler par endroit). De là

$$\dot{M} = \kappa[(a-s)\mathbf{n} + b\mathbf{t}]$$

La tangente unitaire cherchée est donc

$$\mathbf{u} = \frac{\dot{M}}{|\dot{M}|} = \frac{(a-s)\mathbf{n} + b\mathbf{t}}{\sqrt{(a-s)^2 + b^2}}$$

puisque $\mathbf{t}, \mathbf{n}$ forment une base orthonormée.

Il nous reste à exiger que $\dot{\mathbf{u}}$ soit nul. Or, en appliquant de nouveau les formules de Frenet, un peu de calcul montre que

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{[(a-s)^2 + b^2]\kappa - b}{\sqrt{(a-s)^2 + b^2}^3}\,[b\mathbf{n} - (a-s)\mathbf{t}].$$

Ainsi, *pour que le moyeu se déplace selon une droite, il faut et il suffit que la courbure de l'arcade soit donnée par*

$$\kappa(s) = \frac{b}{(a-s)^2 + b^2}. \tag{1}$$

3.1 La chaînette

Le graphe du cosinus hyperbolique cosh est parfois appelé *chaînette*. Légèrement modifié, il va nous fournir le profil des arcades que nous cherchons. Nous allons trouver celui-ci sous la forme du graphe de la fonction $x \mapsto p\cosh\frac{x}{p}$, limité à l'intervalle $[-\ell, \ell]$, où p et ℓ sont des nombres à déterminer. Par abus, nous appellerons encore chaînette ce graphe. Compte tenu de la symétrie de la chaînette, nous supposerons que $\ell > 0$. Il est clair également qu'on ne change rien à la géométrie de la courbe si on change p de signe. Nous supposerons donc $p > 0$.

Convenons de ce que le point du graphe d'abscisse $-\ell$ corresponde au début d'une arcade. C'est à partir de lui que nous allons donc mesurer la longueur de l'arc de la chaînette, orientée selon les valeurs croissantes de x.

Longueur d'arc d'une chaînette La longueur d'arc du graphe d'une fonction $f : x \mapsto f(x)$, comptée positivement à partir du point d'abscisse x_0 selon les valeur croissantes de x, est donnée par la formule

$$s(x) = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + f'^2(t)}dt.$$

Dans notre cas, cela donne

$$s(x) = \int_{-\ell}^{x} \cosh\frac{t}{p}dt = p\sinh\frac{x}{p} + p\sinh\frac{\ell}{p} \tag{2}$$

Courbure d'une chaînette La courbure (non orientée) du graphe d'une fonction f est donnée par la formule

$$\frac{|f"|}{[1+f'^2]^{3/2}}.$$

Pour notre courbe, nous obtenons alors la courbure sous la forme

$$\kappa_c(x) = \frac{1}{p}\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{p}}. \tag{3}$$

Exprimons cette courbure au moyen de la longueur d'arc. En utilisant (2), il vient facilement

$$\kappa_c(s) = \frac{p}{p^2 + (s - p\sinh\frac{\ell}{p})^2}.$$

En comparant cette expression avec l'expression (1), on voit donc que *le profil d'une arcade de la route est nécessairement un arc de chaînette correspondant à*

$$b = p \text{ et } a = b\sinh\frac{\ell}{b}. \tag{4}$$

En effet, puisque les deux courbes sont planes, leurs torsions sont nulles. Elles sont donc isométriques si et seulement si leurs courbures sont égales.

4 Le profil de la route.

Les égalités ci-dessus déterminent univoquement p et ℓ en fonction de a et de b. En effet, elles donnent

$$\frac{\ell}{b} = \operatorname{arcsinh}\frac{a}{b} = \ln(\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2}+1}).$$

Il n'y a donc plus de degré de liberté : soit l'arc de chaînette $\mathcal{C}$ obtenu pour ces valeurs répond aux conditions décrites à la section 2, soit il n'existe pas de route permettant de rouler en vélo à roues polygonales avec un minimum de confort !

Longueur... La longueur L de $\mathcal{C}$ est donnée par la formule (2) dans laquelle on reporte les valeurs (4). Elles donnent immédiatement $L = 2a$, comme souhaité puisque a est la moitié de la longueur du côté de la roue.

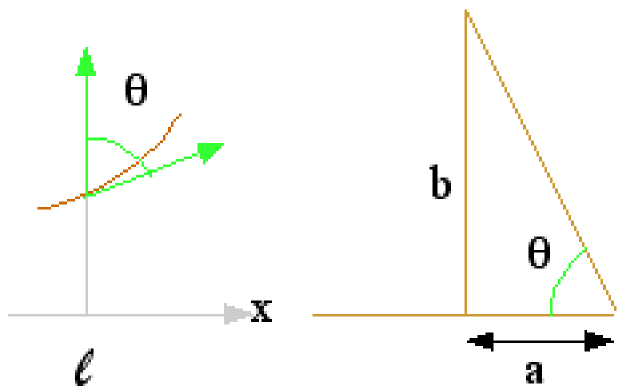

FIG. 5 – Condition d'angle.

...et angle. Il faut encore vérifier que l'angle θ fait par la tangente à $\mathcal{C}$ en le point d'abscisse ℓ avec la verticale est égal à celui fait par un rayon de la roue avec chaque côté adjacent (voir figure 5).

L'angle $\frac{\pi}{2} - \theta$ étant l'angle fait par la tangente à $\mathcal{C}$ avec l'horizontale, la tangente de cet angle est donné par la dérivée de la fonction dont il est le graphe. On a donc

$$\cot\theta = \sinh\frac{\ell}{b} = \frac{a}{b}.$$

Comme le montre la figure 5, θ est donc bien l'angle souhaité.