...

L'interaction entre la géométrie plane et la géométrie de l'espace sert de trame aux chapitres *Le triangle des triangles* et *Triangles acutangles et tétraèdres isocèles*. Le premier illustre le fait qu'une question naturelle, anodine par ailleurs, peut ne pas avoir de solution mais déboucher sur un résultat, original, inattendu et joli. L'idée d'étudier l'ensemble des triangles plutôt que telle ou telle propriété des triangles est également un aspect de ce texte auquel je suis attaché. Le second est classique dans les démonstrations mais il oscille sans arrêt entre géométrie plane et géométrie de l'espace ; il exploite une caractérisation étonnante des triangles acutangles — ils s'avèrent être très exactement les sections planes d'un trièdre tri-rectangle, pour étudier les tétraèdres isocèles [1]. Ces textes sont très élémentaires et sources de nombreux exercices.

On a parfois l'impression que le produit scalaire ou, de façon équivalente, la structure métrique de la géométrie est une donnée spontanée et unique — en quelque sorte universelle. Ce n'est pas le cas et un même espace affine peut être doté d'une infinité de produits scalaires à chacun desquels correspondent « autant » d'objets dont l'unicité est cependant parfaitement évidente pour la plupart d'entre nous. Le chapitre *Où sont les orthocentres d'un triangle ?* illustre la chose. Il illustre également la convexité de l'ensemble des produits scalaires. On y jette un regard neuf sur les « cas d'égalité » des triangles que prisait tant, à une époque, la géométrie de l'enseignement secondaire belge. Le texte s'achève par une apparition insolite du nombre d'or, qu'on retrouve décidément partout. Moins élémentaire que les deux précédents, il reste accessible aux élèves du secondaire et est également source d'exercices.

A l'instar de *La Question de Roger Renard* décrit plus bas, *A propos des densités sur les espaces vectoriels* pose une question facile à appréhender mais dont la réponse est déconcertante [2] : *Quelle est la nature de ce qu'on intègre ?* La réponse usuelle des élèves : « Une fonction » est erronée, observation qu'ils trouvent, régulièrement, assez choquante. C'est l'occasion de faire un pas vers la notion de mesure, à travers celle de densité. Ce texte peut se rattacher au thème du produit scalaire car, comme on le fait observer, les densités les plus courantes rencontrées par les étudiants en sciences mathématiques sont associées à des produits scalaires. Il est d'un niveau de difficulté relativement élevé.

1. Ceux dont toutes les faces sont isométriques du moins selon la terminologie anglo-saxonne.

2. Pour les élèves en fin d'étude secondaire ou au tout début des études universitaires.

La question posée dans *La question de R. Renard* est des plus naturelle, accessible à tous et très simple à formuler. Sous ces apparences anodines se cache en réalité une question profonde dont la résolution met en jeu des concepts et des résultats parmi les plus sophistiqués des mathématiques contemporaines. De plus, à bien y réfléchir, on constate que la question de R. Renard n'est peut être pas aussi simple à énoncer qu'il y paraît de prime abord car, pour le faire de façon précise, il faut avoir une idée claire de ce que signifie *disposer d'une formule générale*. Ce texte peut être lu à divers niveaux, ce qui le rend accessible à un grand nombre. Au premier degré, il présente des constructions explicites d'une solution à la question posée, progressivement de plus en plus élaborées mais techniquement simples, et amusantes pour qui est curieux des mathématiques. Une lecture plus critique suggère des pistes expliquant la genèse de développements mathématiques fondamentaux élaborés durant les dernières décennies.

La difficulté de cerner la notion de formule réapparait dans le chapitre qui a donné son nom au présent recueil : *Le Mathématicien et ses Esclaves*. Elle concerne ici la primitivation des fonctions. Qu'attend-t-on lorsqu'on demande de primitiver une fonction ? Et, d'ailleurs, comment se *donne-t-on* une fonction ? En guise de préambule à la définition

$$\ln x = \int_1^x \frac{du}{u} \tag{1}$$

du logarithme népérien, il est courant de rappeler que la formule

$$\frac{x^{m+1}}{m+1}$$

donne une primitive de $x \mapsto x^m$ sauf, précisément, lorsque $m = -1$ et d'utiliser cette exception pour cautionner l'introduction d'une *nouvelle* fonction. C'est fort sommaire comme justification mais comment faire autrement ? A ce stade de leur cursus, il serait très délicat de montrer aux élèves qu'il n'existe pas de façon de fabriquer ln avec les fonctions et les opérations arithmétiques dont ils disposent. Cela étant : en quoi le membre de droite de l'égalité (1) serait-il moins une formule que

$$\sqrt[3]{\frac{x^2 - \sqrt[5]{x^2+1}}{x^4+1}}$$

par exemple ? Mais l'origine de ce texte est ailleurs : c'est une erreur assez lourde et récurrente dans le calcul des primitives réalisés par un programme de calcul formel qui m'a servi de prétexte. J'avais envie de grogner un peu, trouvant cette erreur inadmissible et dangereuse pour l'utilisateur, parfois peu critique et résolument confiant en les capacités « de l'ordinateur ». De plus, je voulais comprendre comment on pourrait éviter ce genre de fautes malgré tout assez communes. La réponse n'est pas simple : primitiver n'est pas une tâche facile. Le texte reste cependant élémentaire — un peu moins dans son épilogue.

Il y a une certaine difficulté à désigner un nombre fini d'éléments sans les ordonner implicitement. Lorsqu'on parle du triangle ABC, on nomme ses sommets. Ce n'est pas indifférent : il en découle six affinités distinctes, celles qui appliquent respectivement A, B, C sur les images d'une de leurs permutations. Peut-on parler d'un triangle sans ordonner ses sommets, d'une droite définie par deux points sans les *nommer*, etc. ? La théorie générale sous-jacente est celle des espaces de configuration, dont la topologie est très riche et touche à des sujets d'actualité. Ici, on se concentre sur les configurations de deux ou trois points d'un plan, sans se préoccuper le moins du monde de ces aspects topologiques. On représente les points d'un plan par des nombres complexes et on les rend anonymes en utilisant des polynômes : n points sont les zéros d'un unique polynôme de la forme $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$. L'*ensemble* des points est caractérisé par ce polynôme mais les points ne sont pas nommés individuellement. Par certains côtés, le sujet est classique : il est commun de représenter les transformations géométriques planes par des fonctions homographiques d'un argument complexe. Par exemple une rotation de centre 0 consiste à multiplier par un nombre complexe de module 1, etc. Deux textes, *Somme et Produit* et *Triangles, nombres complexes et les formules de Cardan*, sont consacrés à ce thème. Le premier traite de problèmes relatifs aux droites : comment reconnaître qu'un point z appartient à la droite passant par les deux racines de $x^2 + px + q$ ou que deux droites sont parallèles, perpendiculaires, etc. Curieusement, les espaces projectifs rôdent et la question touche sans en avoir l'air [3] aux problèmes liés à la notion de formule, à la continuité et à la notion de fibré auxquelles il est fait explicitement allusion dans un autre chapitre. Le second texte pose quelques questions relatives aux triangles décrits par un polynôme du troisième degré. C'est l'occasion d'illustrer la méthode de Cardan de résolution des équations du troisième degré. Le niveau est élémentaire, et même très élémentaire s'agissant du premier — il faut cependant connaitre la notion de nombre complexe. Il y a également matière à de nombreux petits exercices qu'on peut extraire des faits exposés.

A la fois le style et le fond d'un chapitre, du moins tel qu'il est rédigé, le distinguent des autres. Je ne souhaitais pourtant pas le retravailler. Il possède un rythme auquel je tiens et qui résulte de l'endroit où il a

3. Ces notions n'apparaissent à aucun moment dans le texte.

été écrit : un forum de discussion mathématique. Cela lui confère une sorte de spontanéité en laquelle réside son principal attrait, pour autant qu'il en ait. *Exponentielles-polynômes — Dialogue mathématique* ainsi que l'a baptisé l'utilisateur du forum qui l'a compilé est consacré à un sujet qui fascine assez régulièrement tout un chacun. Il est vrai qu'il peut également être perçu à des degrés d'abstraction variés qu'on peut moduler à la mesure de ses intérêts. Les uns penseront à la suite de Fibonacci et d'autres seront impressionnés par les horizons lointains et merveilleux du paysage entrevu. Le niveau n'est ni élémentaire ni sophistiqué. Il s'agit d'une histoire racontée sans souci du détail mais mue par une passion. La technique est donc tout à fait secondaire. S'il y avait un thème auquel rattacher ce texte, ce serait celui de l'analogie comme moteur d'inspiration. De façon très modeste, il illustre en effet par endroit comment une méthode féconde dans un cadre peut être transposée à un autre cadre en profitant de similitudes purement formelles entre les deux cadres.

Au fond, c'est un peu une manifestation de la manière dont les mathématiciens jouent de l'abstraction pour faire progresser leur science, thème qui transparaît aussi en filigrane du chapitre *La transformation d'Agnesi*. A partir de la définition de la célèbre *Socière d'Agnesi*, on y dégage une transformation très générale du plan, inversible, à l'aide de laquelle on détermine de nombreux lieux géométriques qui donnent naissance à autant de petits énoncés amusants qu'on peut s'exercer à redécouvrir directement. Les transformées des cercles par rapport à un de leurs points donnent une famille de cubiques englobant la *Sorcière d'Agnesi* et la *Serpentine*. Elles se présentent comme graphes de fractions rationnelles, ce qui permet d'en faire une étude relativement poussée. Le niveau est celui du secondaire supérieur.

…