LE TRIANGLE DES TRIANGLES
RÉSUMÉ

PIERRE LECOMTE

Sans le vouloir, lorsqu'on trace rapidement un triangle sur une feuille de papier ou au tableau, il est assez souvent isocèle ou rectangle, ou presque. A ce propos, quelqu'un se demandait, sur un forum consacré aux mathématiques, s'il existe une forme de triangle que l'on pourrait considérer comme la plus quelconque possible.

D'une certaine façon, trouver une telle forme, censée représenter le prototype des triangles scalènes, serait contradictoire car possèder une qualité au plus haut degré n'est, précisément, jamais banal ! La question est cependant fort intéressante car elle conduit à envisager des notions et des résultats pourtant familiers d'un point de vue très inhabituel.

Nous allons par exemple considérer *l'ensemble* des triangles plutôt que tel ou tel triangle donné, et nous demander comment représenter leur formes afin de les comparer. A défaut de pouvoir décider quelle est la plus quelconque d'entre elles, nous serons ainsi conduits à une jolie propriété tout à fait inattendue, un vrai théorème dont on ne pouvait soupçonner l'existence au seul énoncé de la question initiale.

Nous considérerons que des triangles ont *même forme* si et seulement si ils sont semblables. La forme d'un triangle est donc caractérisées par ses angles. Ceux-ci, rangés par valeurs croissantes, forment un point de $\mathbb{R}^3$. On obtient ainsi une représentation graphique de l'ensemble des formes des triangles. Il s'avère que c'est un triangle ayant de remarquables propriétés : le « triangle des triangles ».

Il est amusant, et facile, d'y repérer les formes particulières : triangles équilatéraux, isocèles, rectangles, acutangles, obtusangles, etc. Naïvement, il semble à l'examiner de près, qu'il y ait « trois fois plus » de triangles obtusangles que d'acutangles. La surprise annoncée est un théorème qui confirme l'intuition et livre la clé du mystère...