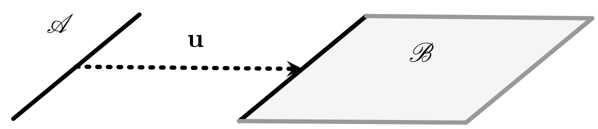
PARALLÉLISME DANS LES ESPACES AFFINES

PIERRE LECOMTE

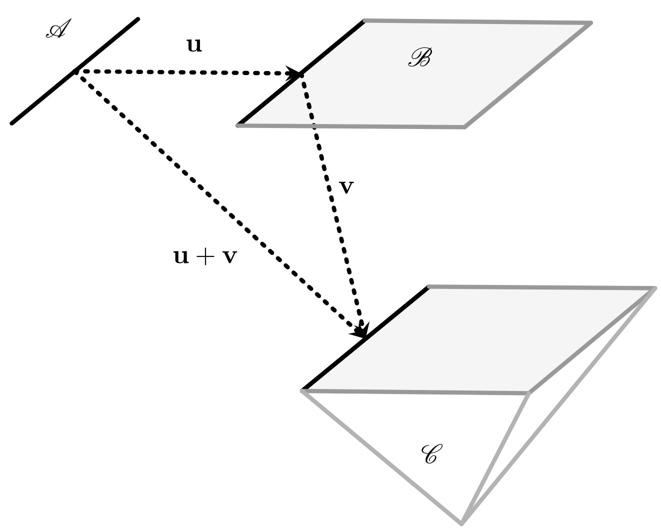
1. Définition et premières propriétés

Soient des parties $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ d'un espace affine $\mathscr{E}$. On dit que $\mathscr{A}$ *est parallèle à* $\mathscr{B}$, ce qu'on note $\mathscr{A} \parallel \mathscr{B}$, si une translation applique $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{B}$. Formellement, $\mathscr{A} \parallel \mathscr{B}$ s'il existe $\mathbf{u} \in \overrightarrow{\mathscr{E}}$ tel que $\mathscr{A} + \mathbf{u} \subset \mathscr{B}$, où

$$\mathscr{A} + \mathbf{u} = \{A + \mathbf{u} | A \in \mathscr{A}\}$$



Le parallélisme de parties de $\mathscr{E}$ est une relation réflexive. En effet, pour toute partie $\mathscr{A}$ de $\mathscr{E}$, on a $\mathscr{A} \parallel \mathscr{A}$ car $\mathscr{A} + \mathbf{0} = \mathscr{A}$.



Comme illustré ci-dessus, elle est aussi transitive. En effet, pour toutes parties $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ de $\mathscr{E}$ et tous $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \overrightarrow{\mathscr{E}}$, si $\mathscr{A}$ est appliqué dans $\mathscr{B}$ par la translation de vecteur $\mathbf{u}$ et si $\mathscr{B}$ est appliqué dans $\mathscr{C}$ par celle de vecteur $\mathbf{v}$, alors la translation de vecteur $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ applique $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{C}$ puisque

$$\mathscr{A}+(\mathbf{u}+\mathbf{v})=(\mathscr{A}+\mathbf{u})+\mathbf{v}\subset\mathscr{B}+\mathbf{v}\subset\mathscr{C}$$

La relation de parallélisme n'est toutefois pas une relation d'équivalence car elle n'est pas symétrique. En effet, ce n'est pas parce qu'un translaté de $\mathscr{A}$ est inclus à $\mathscr{B}$ qu'automatiquement un translaté de ce dernier l'est à $\mathscr{A}$. C'est même généralement le contraire. Nous verrons cependant que, restreinte aux variétés affines d'une même dimension, la relation de parallélisme devient symétrique.

2. Parallélisme de variétés affines

Le parallélisme de variétés affines a des propriétés particulières qui résultent de leur structure spécifique. Pour rappel, si $\mathscr{V}$ est une variété affine et si A est un de ses points, alors $\mathscr{V}=A+\overrightarrow{\mathscr{V}}$, fait que nous allons beaucoup utiliser.

Commençons par deux remarques élémentaires qui vont nous conduire à ne considérer que des variétés affines de dimension au moins égale à 1. Le vide est parallèle à toute partie de $\mathscr{E}$. Cela provient de ce que

$$\varnothing+\mathbf{u}=\varnothing$$

pour tout $\mathbf{u}\in\overrightarrow{\mathscr{E}}$. Dans le même ordre d'idée, tout singleton $\{P\}$ est parallèle à n'importe quelle partie non vide $\mathscr{A}$ de $\mathscr{E}$: si $A\in\mathscr{A}$, alors

$$\{P\}+\overrightarrow{PA}=\{A\}\subset\mathscr{A}$$

Ces deux exemples de parallélisme sont, bien entendu, de peu d'intérêt. En conséquence, comme annoncé, nous ne considérerons dans la suite que des variétés affines de dimension strictement positive — ce qui ne sera pas rappelé systématiquement.

Proposition 2.1. *Soient des variétés affines $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ de $\mathscr{E}$.*
a) On a $\mathscr{V}\parallel\mathscr{W}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{\mathscr{V}}\subset\overrightarrow{\mathscr{W}}$.
b) On a $\overrightarrow{\mathscr{V}}=\overrightarrow{\mathscr{W}}$ si, et seulement si, les variétés $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ sont l'une un translaté de l'autre.

Démonstration. Démontrons a). Supposons d'abord que $\mathscr{V}$ est parallèle à $\mathscr{W}$: il existe $\mathbf{u}$ tel que $\mathscr{V}+\mathbf{u}\subset\mathscr{W}$. Soit $A\in\mathscr{V}$. Le point $A+\mathbf{u}$ appartient à $\mathscr{W}$ et l'inclusion précédente donne

$$(A+\mathbf{u})+\overrightarrow{\mathscr{V}}=\underbrace{(A+\overrightarrow{\mathscr{V}})}_{=\mathscr{V}}+\mathbf{u}\subset\mathscr{W}=(A+\mathbf{u})+\overrightarrow{\mathscr{W}} \tag{1}$$

D'après un lemme rappelé plus bas, il résulte de ceci que $\overrightarrow{\mathscr{V}}\subset\overrightarrow{\mathscr{W}}$.

Inversement, supposons que $\overrightarrow{\mathscr{V}} \subset \overrightarrow{\mathscr{W}}$. Considérons des points $A \in \mathscr{V}$ et $B \in \mathscr{W}$. Il vient

$$\mathscr{V} + \overrightarrow{AB} = \left(A + \overrightarrow{\mathscr{V}}\right) + \overrightarrow{AB} = B + \overrightarrow{\mathscr{V}} \subset B + \overrightarrow{\mathscr{W}} = \mathscr{W} \tag{2}$$

ce qui signifie que $\mathscr{V}$ est parallèle à $\mathscr{W}$.

Passons à b). Si $\overrightarrow{\mathscr{V}} = \overrightarrow{\mathscr{W}}$, alors on a encore la relation (2) mais cette fois avec l'égalité à la place de l'inclusion. Dès lors, les variétés $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ sont l'une un translaté de l'autre. Inversement, si $\mathscr{V} + \mathbf{u} = \mathscr{W}$ pour un certain $\mathbf{u}$, alors la relation (1) est encore vraie également, à nouveau avec l'égalité à la place de l'inclusion, de sorte que $\overrightarrow{\mathscr{V}} = \overrightarrow{\mathscr{W}}$ (en vertu du même lemme que celui utilisé plus haut). $\square$

Corollaire 2.2. *Soient des variétés affines $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ de $\mathscr{E}$. Si $\mathscr{V} \parallel \mathscr{W}$ alors $\dim \mathscr{V} \leqslant \dim \mathscr{W}$, l'égalité ayant lieu si, et seulement si, $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ sont l'une un translaté de l'autre.*

Démonstration. Supposons $\mathscr{V} \parallel \mathscr{W}$. Vu le a) de la proposition précédente, $\overrightarrow{\mathscr{V}} \subset \overrightarrow{\mathscr{W}}$ de sorte que

$$\dim \mathscr{V} = \dim \overrightarrow{\mathscr{V}} \leqslant \dim \overrightarrow{\mathscr{W}} = \dim \mathscr{W}$$

L'égalité a lieu si, et seulement si, $\overrightarrow{\mathscr{V}} = \overrightarrow{\mathscr{W}}$ c'est-à-dire, vu le b) de la même proposition, si, et seulement si, les variétés $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ sont l'une un translaté de l'autre. $\square$

A la lumière de ce qui précède, on voit qu'*une variété affine $\mathscr{V}$ est parallèle à une variété affine $\mathscr{W}$ si, et seulement si, $\mathscr{W}$ contient une variété affine parallèle à $\mathscr{V}$ et de même dimension.* On retrouve ici, considérablement généralisé, un critère de parallélisme d'une droite et d'un plan : *une droite est parallèle à un plan si, et seulement si, elle est parallèle à une droite de ce plan.*

On observe également que la relation

$$\mathscr{V} \parallel \mathscr{W} \quad \& \quad \dim \mathscr{V} = \dim \mathscr{W}$$

est une relation d'équivalence dans l'ensemble des variétés affines. On sait depuis le début qu'elle est réflexive et transitive. Elle est symétrique car si $\mathscr{W} = \mathscr{V} + \mathbf{u}$ est un translaté de $\mathscr{V}$ alors $\mathscr{V} = \mathscr{W} - \mathbf{u}$ en est un de $\mathscr{W}$. D'ordinaire, la classe d'équivalence de $\mathscr{V}$ pour cette relation est appelée la *direction* de $\mathscr{V}$. D'après ce qui précède, deux variétés affines ont même direction si, et seulement si, leurs sous-vectoriels directeurs sont égaux — la dénomination "sous-vectoriel directeur" est donc appropriée !

3. Parallélisme et l'axiome des parallèles

La propriété qui suit généralise des faits bien connus de la géométrie élémentaire. Elle implique par exemple le théorème : *Si une droite est parallèle à un plan et le rencontre, elle lui est incluse* de même que le célèbre axiome : *Par un point donné, on peut mener une seule parallèle à une droite donnée.*

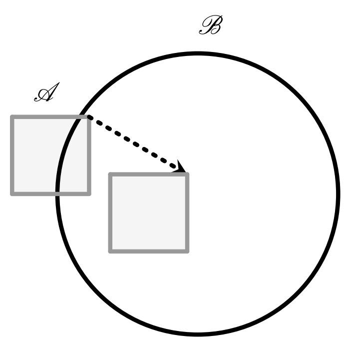
Proposition 3.1. *Soient des variétés affines $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ de $\mathscr{E}$. Si $\mathscr{V} \parallel \mathscr{W}$ alors $\mathscr{V} \cap \mathscr{W} = \varnothing$ ou $\mathscr{V} \subset \mathscr{W}$.*

Démonstration. Supposons que $\mathscr{V}$ est parallèle à $\mathscr{W}$ et que $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ ont un point commun, A. D'après la première proposition ci-dessus, $\overrightarrow{\mathscr{V}} \subset \overrightarrow{\mathscr{W}}$. De là

$$\mathscr{V} = A + \overrightarrow{\mathscr{V}} \subset A + \overrightarrow{\mathscr{W}} = \mathscr{W}$$

$\square$

La figure suivante montre que la propriété ne s'applique pas à des parties quelconques $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ de $\mathscr{E}$.



C'est parce que $\mathscr{B}$ n'est pas une variété affine que ce contre-exemple fonctionne. En effet, en passant à l'enveloppe affine de $\mathscr{V}$, on peut étendre la validité de la proposition au cas où seul $\mathscr{W}$ est une variété affine — nous ne détaillerons pas la vérification.

En ce qui concerne la réciproque de la proposition ci-dessus, s'il est évident qu'une variété affine incluse à une autre lui est parallèle par contre, deux variétés affines disjointes ne sont pas nécessairement parallèles. Un contre-exemple simple est fourni par des droites non coplanaires — on les dit *gauches* — dans un espace de dimension trois. Cependant, deux droites disjointes d'un plan sont parallèles, de même que, dans un espace de dimension trois, une droite et un plan disjoints ou encore deux plans disjoints. Ceci se généralise de la façon suivante.

Proposition 3.2. *Si une variété affine $\mathscr{V}$ et un hyperplan $\mathscr{H}$ sont disjoints alors $\mathscr{V} \parallel \mathscr{H}$.*

Démonstration. Nous allons établir la proposition par contraposition. Supposons donc que $\mathscr{V}$ n'est pas parallèle à $\mathscr{H}$. D'après le point a) de la proposition (2.1), cela signifie que l'on peut trouver un élément $\mathbf{e}_1$ de $\overrightarrow{\mathscr{V}}$ qui ne se trouve pas dans $\overrightarrow{\mathscr{H}}$. Complété par une base $(\mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ de $\overrightarrow{\mathscr{H}}$, il nous donne une base $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$. En effet, $n = \dim \mathscr{E}$ et $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ sont linéairement indépendants car si

$$\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{e}_n = \mathbf{0}$$

alors tout d'abord $\alpha_1 = 0$ sans quoi

$$\mathbf{e}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\mathbf{e}_2 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\mathbf{e}_n \in \overrightarrow{\mathscr{H}}$$

et, cela observé, les autres α_i sont nuls puisque $\mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ sont linéairement indépendants.

Choisissons alors $A \in \mathscr{V}$ et $B \in \mathscr{H}$ et décomposons $\overrightarrow{AB}$ selon cette base :

$$\overrightarrow{AB} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{e}_n$$

En écrivant autrement cette relation, nous obtenons un point

$$A + \lambda_1 \mathbf{e}_1 = B - (\lambda_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{e}_n)$$

de $\mathscr{V} \cap \mathscr{H}$ qui n'est donc pas vide. □

4. Appendice

Voici le lemme utilisé plus haut.

Lemme 4.1. *Soient un point A de $\mathscr{E}$ et des sous-vectoriels L, L' de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$. Si*

$$A + L \subset A + L'$$

alors $L \subset L'$.

Démonstration. Soit $\mathbf{u} \in L$. Puisque $A + \mathbf{u} \in A + L$, il existe $\mathbf{u}' \in L'$ tel que $A + \mathbf{u} = A + \mathbf{u}'$. Vu l'unicité de la translation qui applique un point sur un autre, on en déduit que $\mathbf{u} = \mathbf{u}'$ et donc que $\mathbf{u} \in L'$. □