COORDONNÉES BARYCENTRIQUES ET LES THÉORÈMES DE MENELAÜS ET CEVA

PIERRE LECOMTE

On va fournir des preuves des théorèmes de Menelaüs et Ceva utilisant les coordonnées barycentriques. On fixe une fois pour toute un plan affine $\mathscr{E}$.

1. Coordonnées barycentriques

Considérons trois points non alignés A, B et C de $\mathscr{E}$. Comme ils ne sont pas alignés, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas multiples l'un de l'autre : ils sont linéairement indépendants et forment donc une base de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$.

Proposition 1.1. *Pour tout $P \in \mathscr{E}$, il existe un et un seul triple de nombres (p, q, r) vérifiant*

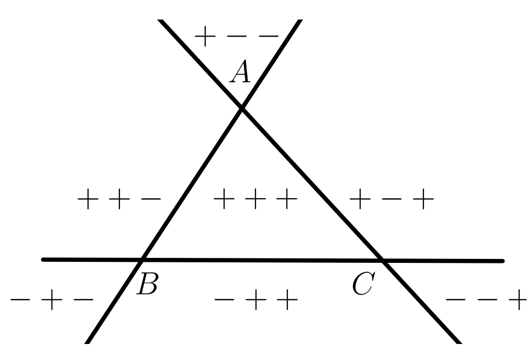
$$\begin{cases} p + q + r = 1 \\ P = pA + qB + rC \end{cases} \tag{1}$$

Démonstration. Si a, b sont les composantes de $\overrightarrow{AP}$ selon la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, on a

$$P = A + \overrightarrow{AP} = (1 - a - b)A + aB + bC$$

et $p = 1 - a - v, q = a, r = b$ vérifient (1). Ils sont les seuls à le faire car si (1) est satisfait, alors q et r sont nécessairement les composantes de $\overrightarrow{AP}$ selon la base en question. $\square$

Les nombres p, q, r vérifiant (1) sont les *coordonnées barycentriques* de P par rapport au triangle ABC. Leurs signes en fonction de la position de P par rapport au triangle sont présentés à la figure suivante.



Il est intéressant d'examiner d'un peu plus près la décomposition (1) en discutant séparément les cas $p = 1$ et $p \neq 1$. Cela nous servira plus bas. Si $p = 1$, alors $q = -r$ et

$$P = A + r\overrightarrow{BC}$$

ce qui montre que P est sur la parallèle à BC menée par A. Par contre, si $p \neq 1$ alors

$$P = pA + (1-p)\left(\frac{q}{1-p}B + \frac{r}{1-p}C\right)$$

relation qui prouve que P est situé sur la droite AA', où

$$A' = \frac{q}{1-p}B + \frac{r}{1-p}C \tag{2}$$

qui est un point de BC. En d'autre termes, *AP et BC se coupent en A'*.

Les éléments de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ admettent une décomposition analogue à celle d'un point.

Proposition 1.2. *Pour tout $\mathbf{u} \in \overrightarrow{\mathscr{E}}$ il existe un seul triple de nombres (p, q, r) vérifiant*

$$\begin{cases} p + q + r = 0 \\ \mathbf{u} = pA + qB + rC \end{cases} \tag{3}$$

Démonstration. On procède comme dans la preuve de la première proposition. L'unicité résulte de ce que si p, q, r existent alors q et r sont nécessairement les composantes a et b de $\mathbf{u}$ selon la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Pour l'existence, on constate que

$$\mathbf{u} = (-a-b)A + aB + bC$$

puisque $\mathbf{u} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$. □

Nous dirons des nombres p, q, r vérifiant (3) qu'ils sont les composantes barycentriques de $\mathbf{u}$.

Comme dans le cas des points, il est utile de discuter selon les valeurs de p. Si $p = 0$, alors $\mathbf{u} = r\overrightarrow{BC}$ est parallèle à BC. Si $p \neq 0$, alors

$$\mathbf{u} = pA - p\left(-\frac{q}{p}B - \frac{r}{p}C\right) = p\overrightarrow{A'A}$$

où

$$A' = -\frac{q}{p}B - \frac{r}{p}C \tag{4}$$

est un point de BC. En d'autres termes, $\mathbf{u}$ est un vecteur directeur de AA', ce qui montre que A' est l'intersection de BC et de la droite parallèle à $\mathbf{u}$ et issue de A.

2. Un critère d'alignement

Pour établir le théorème de Menelaüs, nous utiliserons le critère suivant.

Proposition 2.1. *Trois points $A, B, C \in \mathscr{E}$ sont alignés si, et seulement si, il existe un triple de nombres (a, b, c), non tous nuls et tels que*

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ aA + bB + cC = \mathbf{0} \end{cases} \tag{5}$$

Démonstration. Si C appartient à la droite AB, il existe λ tel que $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$, ce qui se réécrit

$$(-1-\lambda)A + \lambda B - C = 0$$

On peut alors prendre $a = -1-\lambda, b = \lambda$ et $c = -1$. Inversement, si $(a, b, c) \neq \mathbf{0}$ vérifie (5), alors, si par exemple $c \neq 0$,

$$C = -\frac{a}{c}A - \frac{b}{c}B$$

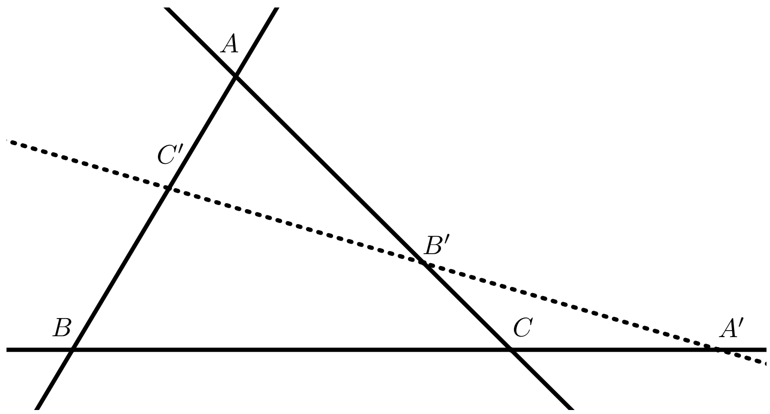
Comme

$$-\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = 1$$

C est donc une combinaison affine de A et B : A, B, C sont alignés. □

3. Théorème de Menelaüs

Théorème 3.1. *Soient un triangle ABC et des points A', B' et C' choisis respectivement sur BC, CA et AB et distincts des sommets du triangle.*



Les points $A'B'C'$ sont alignés si, et seulement si,

$$\sigma_{A,B}(C')\sigma_{B,C}(A')\sigma_{C,A}(B') = -1$$

Démonstration. Posons

$$\alpha = \sigma_{B,C}(A'), \beta = \sigma_{C,A}(B'), \gamma = \sigma_{A,B}(C')$$

de sorte que [1]

$$\left\{\begin{array}{lcl} A' & = & \frac{1}{1+\alpha}B + \frac{\alpha}{1+\alpha}C \\ B' & = & \frac{1}{1+\beta}C + \frac{\beta}{1+\beta}A \\ C' & = & \frac{1}{1+\gamma}A + \frac{\gamma}{1+\gamma}B \end{array}\right. \tag{6}$$

Supposons d'abord A', B', C' colinéaires. Il existe des nombres a, b, c non tous nuls tels que

$$\left\{\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ aA'+bB'+cC'=\mathbf{0} \end{array}\right.$$

Vu (6), la seconde relation s'écrit

$$\left(\frac{\beta}{1+\beta}b + \frac{1}{1+\gamma}c\right)A + \left(\frac{\gamma}{1+\gamma}c + \frac{1}{1+\alpha}a\right)B + \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}a + \frac{1}{1+\beta}b\right)C = \mathbf{0}$$

La somme des coefficients de A, B, C dans cette expression vaut $a + b + c = 0$. Par conséquent ces coefficients sont nuls car A, B, C ne sont

1. Si $R = (1-\lambda)P + \lambda Q$ alors

$$\sigma := \sigma_{P,Q}(R) = \frac{\lambda}{1-\lambda} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{\sigma}{1+\sigma}$$

pas alignés :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\beta}{1+\beta}b + \frac{1}{1+\gamma}c & = & 0 \\ \frac{\gamma}{1+\gamma}c + \frac{1}{1+\alpha}a & = & 0 \\ \frac{\alpha}{1+\alpha}a + \frac{1}{1+\beta}b & = & 0 \end{array}\right.$$

Comme a, b, c ne sont pas tous nuls, le déterminant des coefficients de ce système d'équations en a, b, c est nul ce qui, tous calculs faits, équivaut à $\alpha\beta\gamma = -1$ comme souhaité.

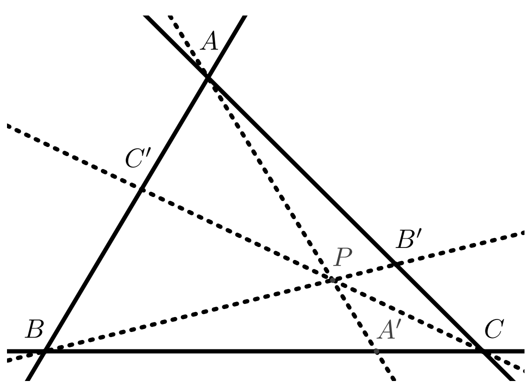
Réciproquement, si $\alpha\beta\gamma = -1$, alors le système admet une solution $(a, b, c) \neq \mathbf{0}$. En additionnant ses équations membre à membre, on voit que $a + b + c = 0$. Vu ce qu'on a dit plus haut, on a aussi

$$aA' + bB' + cC' = \mathbf{0}$$

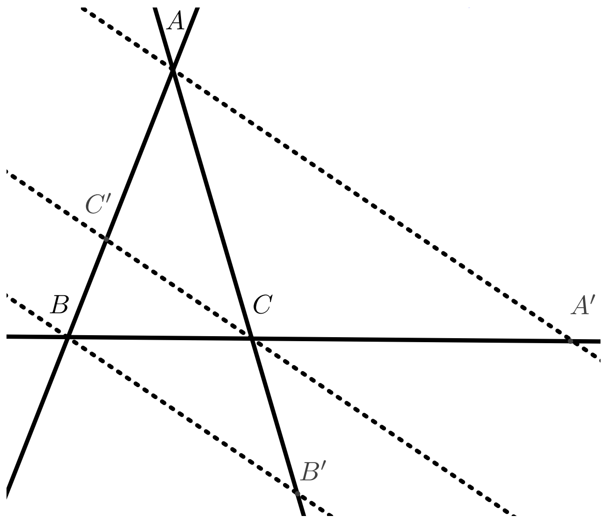
Les points A', B', C' sont donc alignés. $\square$

4. Le théorème de Ceva

Théorème 4.1. *Soient un triangle ABC et des points A', B' et C' choisis respectivement sur BC, CA et AB et distincts des sommets du triangle. Les droites AA', BB' et CC' sont concourantes*



ou parallèles



si, et seulement si,

$$\sigma_{A,B}(C')\sigma_{B,C}(A')\sigma_{C,A}(B') = 1$$

Démonstration. Comme dans la preuve du théorème de Menelaüs, nous noterons α, β, γ les rapports de section considérés.

a) Supposons que AA', BB' et CC' sont concourantes et notons (p, q, r) les coordonnées barycentriques de leur point commun P. Le nombre p n'est pas égal à 1 car AP n'est pas parallèle à BC (cf. (2) et le texte alentour) si bien que

$$A' = \frac{q}{1-p}B + \frac{r}{1-p}C$$

et, donc,

$$\alpha = \frac{r}{q}$$

En permutant circulairement les lettres A, B, C, on obtient aussi

$$\beta = \frac{p}{r} \quad \& \quad \gamma = \frac{q}{p}$$

Par suite $\alpha\beta\gamma = 1$.

b) Supposons à présent que AA', BB' et CC' sont parallèles et notons (p, q, r) les composantes barycentriques d'un de leurs vecteurs directeurs communs $\mathbf{u}$. Le nombre p n'est pas nul car AA' n'est pas parallèle à BC (cf. cette fois (4) et alentours) et, dès lors,

$$A' = -\frac{q}{p}B - \frac{r}{p}C$$

On a donc de nouveau

$$\alpha = \frac{r}{q}, \quad \beta = \frac{p}{r} \quad \& \quad \gamma = \frac{q}{p} \tag{7}$$

puis $\alpha\beta\gamma = 1$.

En résumé, si les droites AA', BB' et CC' sont concourantes ou parallèles alors le produit de rapports de sections considéré vaut 1.

c) Pour établir la réciproque, nous allons exploiter les relations (7) pour déterminer des nombres p, q, r. Selon que leur somme vaut 1 ou 0, ils seront, par construction, les coordonnées barycentriques d'un point P ou les composantes barycentriques d'un vecteur directeur $\mathbf{u}$ commun aux trois droites. Supposons donc que $\alpha\beta\gamma = 1$ et posons

$$q = \frac{r}{\alpha} \quad \& \quad p = \beta r$$

A cause de l'hypothèse $\alpha\beta\gamma = 1$, la troisième relation de (7) est vérifiée quel que soit $r \neq 0$. De plus,

$$p + q + r = \left(\frac{1}{\alpha} + \beta + 1\right) r$$

Ainsi, si

$$\frac{1}{\alpha} + \beta + 1 \neq 0$$

il existe r tel que $p+q+r = 1$ et on obtient un point $P = pA+qB+rC$ commun aux droites AA', BB' et CC' et sinon, alors pour tout $r \neq 0$, $\mathbf{u} = pA + qB + rC$ est un vecteur directeur commun à ces droites. □

5. Céviennes concourantes versus céviennes parallèles

Un des intérêts de la dernière démonstration est de permettre de distinguer les cas où les *céviennes*[2] AA', BB' et CC' sont concourantes de ceux ou elles sont parallèles : *pour autant que* $\alpha\beta\gamma = 1$, *elles sont concourantes si* $\alpha\beta + \alpha + 1 \neq 0$ *et parallèles sinon.*

On peut s'étonner du fait que la condition $\alpha\beta + \alpha + 1 = 0$ n'est pas symétrique en α, β, γ et ce d'autant que si on avait exprimé p, q, r à l'aide de p ou de q plutôt que de r, on serait tombé sur des conditions formellement différentes de celle-ci, donnant à penser qu'il faut peut-être les trois conditions pour assurer le parallélisme. Ce qui se passe est assez remarquable et mérite qu'on s'y attarde.

2. Selon les circonstances, il s'agit des droites AA', etc. ou des segments $[A, A']$, etc. Le contexte lève généralement l'ambiguïté.

Remarque 5.1. *Si* $\alpha\beta\gamma = 1$*, les trois propositions*

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha\beta+\alpha+1=0\\ \beta\gamma+\beta+1=0\\ \gamma\alpha+\gamma+1=0\end{array}\right. \tag{8}$$

sont équivalentes.

En effet, lorsque $\alpha\beta\gamma = 1$, on passe de la première proposition à la seconde en multipliant les deux membres de l'égalité par $\beta\gamma$, de la seconde à la troisième avec $\gamma\alpha$ et de la troisième à la première avec $\alpha\beta$.

Remarque 5.2. *Si deux des propositions* (8) *sont vraies alors* $\alpha\beta\gamma = 1$ *(et la troisième l'est donc aussi).*

En effet, si par exemple, les deux premières sont vraies, alors en multipliant les deux membres de la seconde par α, il vient

$$\alpha\beta\gamma = -\alpha\beta - \alpha = 1$$

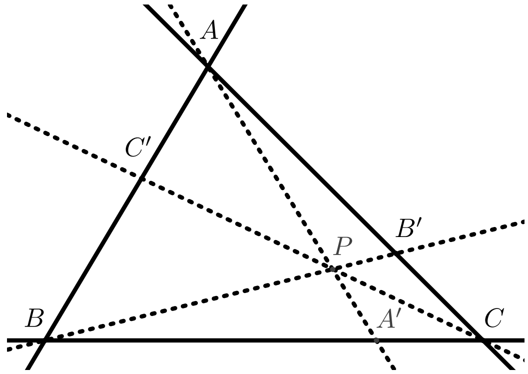
On peut rendre ces remarques assez parlantes en visualisant les choses dans $\mathbb{R}^3$. En effet, $\alpha\beta\gamma = 1$ est l'équation d'une surface de $\mathbb{R}^3$, lieu des points représentatifs des situations où les céviennes sont concourantes ou parallèles. Une quelconque des conditions (8) définit également une surface [3]. La première remarque précise qu'elle recoupe la précédente selon la courbe qui est le lieu des points représentatifs des cas où les céviennes sont parallèles. Quant à la seconde, elle signifie que les surfaces définies par les conditions (8) s'intersectent deux à deux selon cette courbe. Ceci est illustré dans l'article «La troisième dimension du théorème de Ceva» — Images des Mathématiques, CNRS, 2010, accessible en ligne à l'adresse :

`http://images.math.cnrs.fr/La-troisieme-dimension-du-theoreme.html`

6. A propos de l'intersection de céviennes concourantes

Supposons que des céviennes AA', BB', CC' d'un triangle ABC se rencontrent en un point P :

3. Il s'agit de cylindres hyperboliques d'axes de symétrie deux à deux orthogonaux. Je ne connais pas de nom à la surface d'équation $\alpha\beta\gamma = 1$.



Nous allons déterminer la position relative de celui-ci sur chacune d'elles[4] et en déduire ses coordonnées barycentriques par rapport à ABC en les exprimant au moyen des rapports de sections[5] α, β, γ.

D'après le théorème de Menelaüs appliqué au triangle $AA'B$ et aux points alignés C, C', P,

$$\sigma_{A,A'}(P)\sigma_{A',B}(C)\sigma_{B,A}(C') = -1$$

Mais

$$\sigma_{A',B}(C) = \frac{\overrightarrow{A'C}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{\overrightarrow{A'C}}{\overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{A'B}} = -\frac{1}{1 + \frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{A'C}}} = -\frac{1}{1+\alpha}$$

et

$$\sigma_{B,A}(C') = \frac{\overrightarrow{BC'}}{\overrightarrow{C'A}} = \frac{1}{\gamma}$$

Ainsi

$$(9) \quad \sigma_{A,A'}(P) = \gamma\alpha + \gamma, \quad \sigma_{B,B'}(P) = \alpha\beta + \alpha, \quad \sigma_{C,C'}(P) = \beta\gamma + \beta$$

(La première égalité résulte des calculs qu'on vient de faire ; les deux autres s'en déduisent par symétrie.)

Voici une première conséquence de ces relations.

Proposition 6.1. *Le point P occupe les mêmes positions relatives sur les céviennes issues de B et de C si, et seulement si, A' est le milieu de $[B, C]$. En particulier, le centre de gravité du triangle ABC est le seul point de son plan qui occupe la même position relative sur les céviennes qu'il détermine.*

---

4. Autrement dit, les rapports de sections $\sigma_{A,A'}(P)$, etc.
5. Les notations sont celles de la démonstration du théorème de Ceva.

Démonstration. Vu (9), P occupe les mêmes positions relatives sur les céviennes issues de B et de C si, et seulement si, $\alpha\beta + \alpha = \beta\gamma + \beta$. Transformons cette égalité, en tenant compte du fait que $\alpha\beta\gamma = 1$. Il vient

$$\alpha\beta + \alpha^2\beta\gamma = \beta\gamma + \beta$$

puis (β n'est pas nul)

$$\alpha + \alpha^2\gamma = \gamma + 1$$

enfin

$$(\gamma\alpha + \gamma + 1)(\alpha - 1) = 0$$

Or $\alpha\gamma + \gamma$ est le rapport de section de P par rapport à $[A, A']$. Il ne peut donc valoir -1. Par conséquent, la seule possibilité de satisfaire à l'égalité précédente est d'avoir $\alpha = 1$ autrement dit que A' soit le milieu de $[B, C]$. □

Remarquons que A' est le milieu de $[B, C]$ si, et seulement si, $B'C'$ est parallèle à BC car, d'après le théorème de Thalès, ceci équivaut à [6] $\beta\gamma = 1$ qui, moyennant $\alpha\beta\gamma = 1$, équivaut à $\alpha = 1$.

Comme seconde application de (9), nous allons déterminer les coordonnées barycentriques de P par rapport à ABC. De la première relation, nous tirons [7]

$$P = \frac{1}{\gamma\alpha + \gamma + 1}A + \frac{\gamma\alpha + \gamma}{\gamma\alpha + \gamma + 1}A'$$

Vu la première égalité de (6), page 4, cela donne

$$P = \frac{1}{\gamma\alpha + \gamma + 1}A + \frac{\gamma}{\gamma\alpha + \gamma + 1}B + \frac{\gamma\alpha}{\gamma\alpha + \gamma + 1}C$$

égalité à laquelle on peut donner une forme plus symétrique grâce à la relation $\alpha\beta\gamma = 1$:

$$P = \frac{1}{\gamma\alpha + \gamma + 1}A + \frac{1}{\alpha\beta + \alpha + 1}B + \frac{1}{\beta\gamma + \beta + 1}C$$

On ne s'étonnera pas trop de retrouver aux dénominateurs des coordonnées barycentriques de P les membres de gauche des relations (8), page 8. Aucun n'est nul. Cela résulte du fait que les céviennes considérées sont concourantes. On peut aussi, comme dans la preuve précédente, remarquer que si l'un d'eux était nul, alors le rapport de section de P par rapport à une des céviennes vaudrait -1.

---

6. Observer que

$$\frac{1}{\beta} = \sigma_{A,C}(B') \quad \& \quad \gamma = \sigma_{A,B}(C')$$

$\beta\gamma = 1$ signifie donc que ces deux rapports de sections sont égaux.

7. Cf. la note en bas de page 1, page 4.