

UNE ÉTRANGE INÉGALITÉ

PIERRE LECOMTE

1. INTRODUCTION

Sur le forum *M@th en Ligne*¹, un internaute a proposé il y a peu de montrer que *si un parallélépipède rectangle est contenu dans un autre, alors le périmètre du premier est inférieur à celui du second*. Avec les

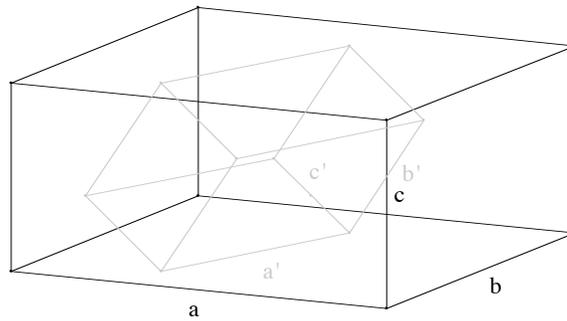


FIGURE 1

notations de la figure 1, cela revient à prouver que

$$(1) \quad a' + b' + c' \leq a + b + c$$

L'hypothèse, l'inclusion d'un volume dans un autre, est inhabituelle. De plus, l'inégalité semble évidente, de prime abord, mais c'est un leurre. On a par exemple l'impression de pouvoir déplacer le petit parallélépipède à l'intérieur du grand de manière à rendre leurs côtés parallèles deux à deux. Dans une telle configuration, l'inégalité ne fait aucun doute. Ce n'est cependant pas possible car on peut imaginer des situations où un des côtés du petit parallélépipède est plus grand que ceux de l'autre. Un exemple est donné à la figure 2. Dans celle-ci, la face « frontale » du grand parallélépipède est un carré de côté u , et ses

1. Fil de discussion 49768 sur <http://www.forum.math.ulg.ac.be>, le 28 octobre 2009.

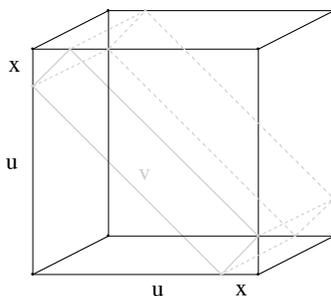


FIGURE 2

autres côtés sont supposés plus courts. Le petit parallélépipède a une face incluse dans ce carré. On a

$$v = \sqrt{2}(u - x)$$

de sorte que $v > u$ lorsque²

$$x < \frac{2 - \sqrt{2}}{2}u$$

En outre, s'il est vrai que des corps e et e' emboîtés, $e' \subset e$, donnent lieu à l'inégalité

$$\text{Vol}(e') \leq \text{Vol}(e)$$

entre leurs volumes, on ne peut généralement rien affirmer de semblable à propos de leurs aires ni des autres mesures qu'on peut éventuellement leur associer. Cette remarque vaut en toute dimension et la figure 3 l'illustre dans le cas d'un plan. On y voit un polygone (grisé) logé dans un rectangle. Il est clair que le périmètre du polygone peut être rendu aussi grand que l'on veut et en tout cas, s'il ne l'est pas déjà, plus grand que celui du rectangle.



FIGURE 3

Je ne trouve donc pas la propriété si évidente que cela, au contraire, et je vais dès lors en donner une démonstration. Étrange pour étrange, celle-ci est également fort inhabituelle. Elle repose sur une technique

2. Pour information, $\frac{2-\sqrt{2}}{2} = 0,292893218813\dots$

présentant un intérêt propre et que nous appliquerons à d'autres situations.

L'inégalité étudiée admet le corollaire suivant : *si un rectangle est inclus à un autre, alors le périmètre p de ce dernier est supérieur à celui du premier, p' .* En effet, en élevant perpendiculairement à leur plan, et du même côté de celui-ci, des segments de même longueur depuis chaque sommets de tels rectangles, on construit des parallélépipèdes rectangles. La figure 4 illustre cette construction : les deux rectangles y sont représentés en foncés. En appliquant à ces parallélépipèdes l'inégalité initiale, on constate que $p' \leq p$ comme annoncé.

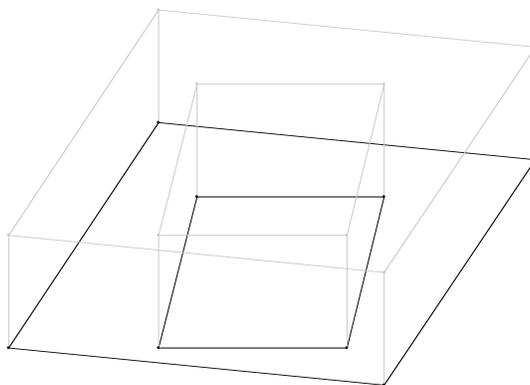


FIGURE 4

2. DÉMONSTRATION DE L'INÉGALITÉ

Plaçons-nous dans un espace affine euclidien \mathcal{E} de dimension 3. Nous noterons $\vec{\mathcal{E}}$ l'espace de ses vecteurs libres. Pour toute partie e de \mathcal{E} et tout nombre positif t , nous désignerons par e_t l'ensemble obtenu en centrant sur chaque point de e une boule de rayon t . Ainsi

$$e_t = \left\{ x + u \mid x \in e, u \in \vec{\mathcal{E}}, |u| \leq t \right\}$$

On peut établir la propriété suivante, mais cela ne sera pas fait ici sinon dans les cas particuliers dont nous aurons besoin³.

Propriété 2.1. *Lorsque e est un convexe borné et fermé de \mathcal{E} , le volume de e_t est un polynôme de degré 3, de la forme*

$$\text{Vol}(e_t) = \text{Vol}(e) + \mu_1(e)t + \mu_2(e)t^2 + \frac{4}{3}\pi t^3$$

³. Une partie de \mathcal{E} est *convexe* si elle contient les segments dont les extrémités lui appartiennent.

Si, par exemple, e est la boule (fermée) $b_{A,r}$ de centre A et de rayon r , alors e_t est la boule de centre A et de rayon $r + t$ et

$$\text{Vol}(e_t) = \text{Vol}(b_{A,r+t}) = \frac{4}{3}\pi(r+t)^3 = \frac{4}{3}\pi r^3 + 4\pi r^2 t + 4\pi r t^2 + \frac{4}{3}\pi t^3$$

On constate que dans ce cas, $\mu_1(e)$ est l'aire de la boule $b_{A,r}$.

C'est un fait général : dans tous les cas classiques où l'aire $\mathcal{A}(e)$ de e est définie, on vérifie qu'elle vaut $\mu_1(e)$. L'explication intuitive est la suivante. Pour t très petit, la différence $e_t \setminus e$ s'apparente à une mince pellicule délimitée par deux surfaces fort proches — distantes de t , pratiquement. L'une d'elles est celle de e . La figure 5 illustre cela, à condition de considérer qu'elle représente une section plane de $e_t \setminus e$. On est donc tenté d'écrire

$$\mathcal{A}(e) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \text{Vol}(e_t \setminus e)$$

et par suite

$$\mathcal{A}(e) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{Vol}(e_t) - \text{Vol}(e)}{t} = \frac{d}{dt} \text{Vol}(e_t)|_{t=0} = \mu_1(e)$$

puisque

$$\text{Vol}(e_t \setminus e) = \text{Vol}(e_t) - \text{Vol}(e)$$

Cet argument heuristique justifie que l'on adopte parfois μ_1 comme définition de l'aire des convexes bornés fermés de \mathcal{E} .

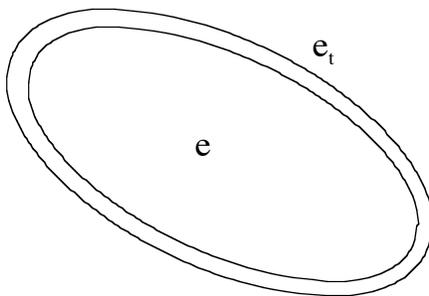


FIGURE 5

Considérons à présent le cas où e est un parallélépipède rectangle, dont nous noterons a, b, c les diverses longueurs des côtés. La figure 6 donne une vue partielle de e_t . Dans celui-ci, on distingue quatre parties (numérotées en chiffres romains). La première est e lui-même (reproduit

en foncé sur la figure). La partie II est l'union des parallélépipèdes d'épaisseur t construits sur les faces de e . Son volume est

$$2(ab + bc + ca)t$$

La troisième partie est formée de quarts de cylindres circulaires droits de rayon t et dont les hauteurs sont les arêtes de e , de volume total

$$\pi(a + b + c)t^2$$

La partie IV est l'union de huitièmes de boules de rayons t , centrées en les sommets de e . Son volume est donc celui d'une boule de rayon t . On constate ainsi que μ_1 est bien l'aire de e tandis que μ_2 est un multiple de son périmètre. Nous venons de prouver le lemme suivant.

Lemme 2.2. *Si e est un parallélépipède rectangle dont les longueurs des côtés sont a, b, c , alors*

$$\text{Vol}(e_t) = abc + 2(ab + bc + ca)t + \pi(a + b + c)t^2 + \frac{4}{3}\pi t^3$$

autrement dit,

$$\mu_1(e) = \mathcal{A}(e) \quad \text{et} \quad \mu_2(e) = \pi(a + b + c).$$

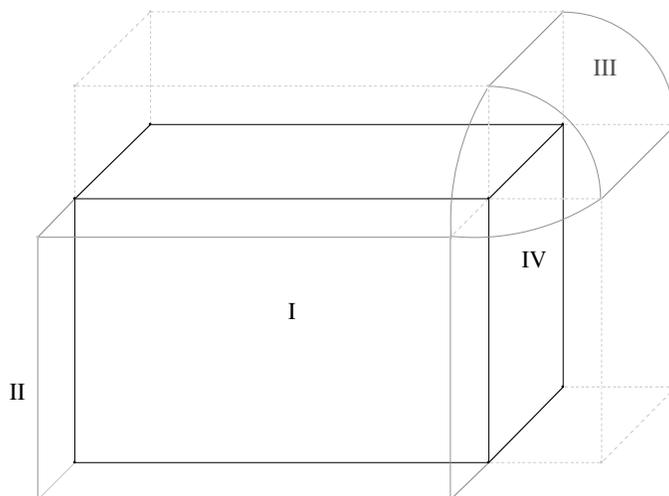


FIGURE 6

Pour un polytope e quelconque, le même partage en quatre régions a lieu. Comme pour le parallélépipède, les termes de degrés t , t^2 et t^3 de $\text{Vol}(e_t)$ sont respectivement fournis par les faces, les arêtes et les sommets. Manifestement, μ_1 est encore l'aire de e mais μ_2 n'est plus nécessairement proportionnel à son périmètre (la somme des longueurs

des arêtes) car les angles que font les faces deux à deux ne sont généralement pas tous égaux. C'est déjà très clair lorsque e est un tétraèdre.

La preuve de la propriété 2.1 résulte alors d'un passage à la limite. Muni d'une certaine distance, la distance de Hausdorff, l'ensemble des convexes bornés fermés de \mathcal{E} est en effet un espace métrique dans lequel les polytopes sont denses et sur lequel la fonction Vol est continue.

Voici une généralisation de l'inégalité (1).

Propriété 2.3. *Si e, e' sont des convexes bornés et fermés de \mathcal{E} et si $e' \subset e$, alors $\mu_2(e') \leq \mu_2(e)$.*

Démonstration. Si e, e' sont des convexes bornés et fermés de \mathcal{E} et si $e' \subset e$, alors $e'_t \subset e_t$ pour tout t positif et, dès lors,

$$\text{Vol}(e'_t) \leq \text{Vol}(e_t)$$

Autrement dit,

$$\text{Vol}(e') + \mu_1(e')t + \mu_2(e')t^2 \leq \text{Vol}(e) + \mu_1(e)t + \mu_2(e)t^2$$

pour tout t positif. En divisant les deux membres par t^2 puis en laissant tendre t vers $+\infty$, on obtient l'inégalité annoncée. \square

Naturellement, pour prouver l'inégalité (1), on n'a pas besoin de toute la généralité de la propriété 2.1, l'argument de la preuve ci-dessus et le lemme 2.2 suffisent. La démonstration de l'inégalité (1) est donc tout à fait élémentaire.

3. INÉGALITÉS DANS UN PLAN EUCLIDIEN

En dimension n quelconque, on peut établir une propriété analogue à la propriété 2.1 : le volume de e_t — on dit plutôt sa *mesure* — est alors un polynôme de degré n dans lequel le coefficient de t^n est la mesure de la boule de rayon 1. Ainsi, lorsque $n = 2$, l'aire de e_t est donnée par

$$(2) \quad \mathcal{A}(e_t) = \mathcal{A}(e) + \mu(e)t + \pi t^2$$

Un argument similaire à celui donné plus haut à propos de μ_1 , conduit à interpréter $\mu(e)$ comme étant le périmètre de e ⁴. Une adaptation immédiate de la preuve de la propriété 2.3 permet de démontrer l'inégalité suivante.

Propriété 3.1. *Si e, e' sont des convexes bornés et fermés d'un plan euclidien et si $e' \subset e$, alors $\mu(e') \leq \mu(e)$.*

4. Dans les cas classiques où le périmètre de e est défini, il coïncide avec $\mu(e)$.

Nous allons obtenir directement l'égalité (2) pour certaines figures e , constater pour celles-ci que $\mu(e)$ est bien leur périmètre $\mathcal{P}(e)$ et en déduire une inégalité ou l'autre.

3.1. Les polygones convexes. Pour un polygone convexe e , comme par exemple celui de la figure 7, e_t comporte trois sortes de parties. Il y a e lui-même (noté I), d'aire $\mathcal{A}(e)$. Ensuite, il y a les rectangles de côtés de longueur t construits sur les côtés du polygone (les parties numérotées II). Leur aire totale est égale à $\mathcal{P}(e)t$. Il y a enfin les portions de disques III, des secteurs angulaires, dont l'union constitue un disque entier. Compte tenu du fait que la somme des angles d'un polygone convexe à n côtés vaut $(n - 2)\pi$, il est en effet facile de voir que la somme des angles de ces secteurs circulaires est égale à 2π . Ainsi, l'égalité (2) est vérifiée pour les polygones convexes, et, pour ceux-ci, μ est le périmètre. En particulier, *si un polygone convexe est contenu dans un autre, alors*

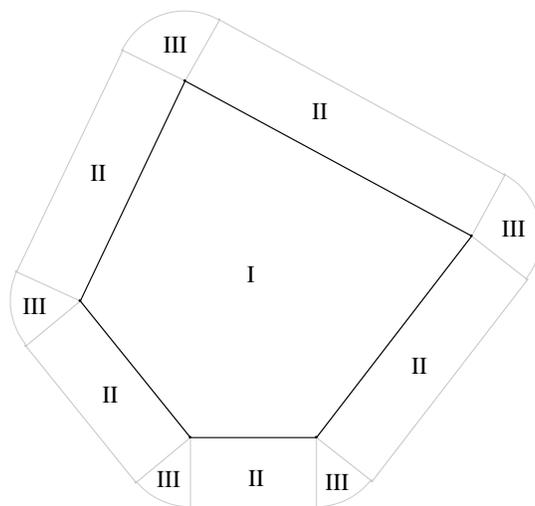


FIGURE 7

son périmètre est plus petit ou égal au périmètre de celui-ci.

3.2. Les secteurs circulaires. La figure 8 représente e_t pour un secteur circulaire e d'angle x^5 , ainsi que les différentes régions que nous allons utiliser pour calculer $\mathcal{A}(e_t)$. Si nous notons r le rayon du secteur, alors son aire vaut

$$\mathcal{A}(e) = \frac{1}{2}xr^2$$

5. C'est un convexe pour autant que $x \leq \pi$.

Celle de la région II' vaut donc

$$\frac{1}{2}x(r+t)^2 - \frac{1}{2}xr^2 = xrt + \frac{1}{2}xt^2$$

L'aire des régions II vaut $2rt$. Deux secteurs notés III ont un angle droit et l'angle du troisième est $\pi - x$. L'aire totale de ces régions vaut donc

$$\frac{1}{2}(2\pi - x)t^2$$

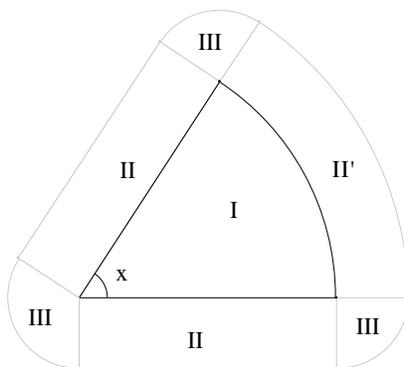


FIGURE 8

Ainsi,

$$\mathcal{A}(e_t) = \mathcal{A}(e) + (2r + rx)t + \pi t^2$$

La formule (2) est donc vérifiée également pour les secteurs circulaires, et dans ce cas, μ est une fois de plus le périmètre \mathcal{P} .

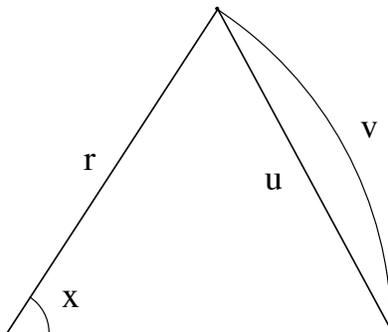


FIGURE 9

3.3. Une inégalité célèbre. Ayant vérifié directement la formule (2) pour les polygones convexes et les secteurs circulaires, nous disposons à leur propos de l'inégalité énoncée à la propriété 3.1.

La figure 9 montre un triangle e' contenu dans un secteur circulaire e dont il partage les sommets. On a donc $\mathcal{P}(e') \leq \mathcal{P}(e)$. Mais, puisque

$$u = 2r \sin \frac{x}{2} \quad \& \quad v = rx$$

cette inégalité s'écrit

$$2 \sin \frac{x}{2} \leq x$$

Dès lors, en posant $x = 2\alpha$,

$$0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2} \quad \implies \quad \frac{\sin \alpha}{\alpha} \leq 1$$