UNE DÉMONSTRATION DE LA RÈGLE DE HÖRNER

PIERRE LECOMTE

1. Introduction

Le but est de prouver le théorème

Théorème 1.1. *Le reste de la division d'un polynôme P par $x - a$ est $P(a)$.*

par des arguments de dimension.

Je note K l'ensemble des complexes ou des réels et $K_{\leq n}[x]$ l'espace des polynômes en x à coefficients dans K et de degré au plus n.

On va principalement utiliser le résultat d'algèbre suivant.

Théorème 1.2. *Soient des K-espaces vectoriels E et F de dimension finie et une application linéaire $A : E \to F$. On a*

$$\dim E = \dim \ker A + \dim \mathrm{im}\ A$$

2. Preuve de 1.1

D'un côté, l'application linéaire

$$T : P \in K_{\leq n}[x] \mapsto P(a) \in K$$

est surjective. On a donc $\dim \ker T = \dim K_{\leq n}[x] - 1 = n$. D'un autre côté, l'application linéaire

$$S : Q \in K_{\leq n-1}[x] \mapsto (x - a)Q \in K_{\leq n}[x]$$

est injective. Par conséquent

$$\dim \mathrm{im}\ S = \dim K_{\leq n-1}[x] = n$$

Or

$$\mathrm{im}\ S \subset \ker T$$

Au total

$$\mathrm{im}\ S = \ker T$$

Soit $P \in K_{\leq n}[x]$. On a $P - P(a) \in \ker T$, donc $P - P(a) \in \mathrm{im}\ S$. Il existe ainsi $Q \in K_{\leq n-1}[x]$ tel que $P = P(a) + (x - a)Q$ $\square$