

Elements de géométrie différentielle

Pierre Lecomte

Variétés différentielles

1. Cartes, atlas et variétés

1.1. Cartes. Une *carte* d'un ensemble M est un couple (U, φ) où U est une partie de M et φ est une bijection de U sur un ouvert de \mathbb{R}^m . L'entier m est la *dimension* de la carte. L'ensemble U en est le *domaine*. Pour $x \in U$, on pose souvent $\varphi(x) = (x^1, \dots, x^m)$ et on appelle les nombres x^i les *coordonnées locales de x dans la carte* (U, φ) .

EXEMPLE 1.1. *Paramétrage d'une partie de \mathbb{R}^m .*

Si (ω, ψ) est un paramétrage d'un sous-ensemble de \mathbb{R}^m , alors en posant $(U = \psi(\omega)$ et $\varphi = \psi^{-1}$), on obtient une carte (U, φ) de ce sous-ensemble. La sphère $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ admet ainsi deux cartes :

$$(U, \varphi) = (\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z \neq 1\}, (x, y, z) \mapsto (\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}))$$

et

$$(V, \psi) = (\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z > 0\}, (x, y, z) \mapsto (x, y)).$$

La première provient du paramétrage par projection stéréographique à partir du point N de coordonnées $(0, 0, 1)$ ("pôle nord"). Il associe aux paramètres $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ le point P de S^2 en lequel la droite NQ recoupe S^2 , où Q est le point de coordonnées $(u, v, 0)$. La seconde provient du paramétrage qui associe aux paramètres (u, v) tels que $u^2 + v^2 < 1$ l'unique point de l'hémisphère nord qui se projette sur celui de coordonnées $(u, v, 0)$.

EXEMPLE 1.2. *L'espace projectif $\mathbb{R}^m P$.*

L'espace projectif $\mathbb{R}^m P$ est l'ensemble des droites de \mathbb{R}^{m+1} contenant l'origine. Soit $i \in \{1, \dots, m+1\}$. On obtient une carte de $\mathbb{R}^m P$, (U_i, φ_i) , en posant $U_i = \{d \in \mathbb{R}^m P : \epsilon^i |_d \neq 0\}$ et

$$\varphi_i(\mathbb{R}\mathbf{u}) = (\frac{u^1}{u^i}, \dots, \hat{i}, \dots, \frac{u^{m+1}}{u^i}).$$

Autrement dit, on considère le point de percée de la droite de vecteur directeur \mathbf{u} dans l'hyperplan d'équation $u^i = 1$. Ce point existe par définition de U_i . Les coordonnées locales de la droite sont alors les coordonnées de ce point dont on omet la i -ème qui vaut toujours 1.

L'ouvert $\varphi_i(U_i)$ est \mathbb{R}^m tout entier. En effet, l'application réciproque φ^{-1} est

$$x \in \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}(x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^i, \dots, x^m).$$

1.2. Atlas. Désignons par k un entier positif ou ∞ . Deux cartes (U, φ) et (V, ψ) de M , de dimensions respectives m et n , sont k -compatibles si $U \cap V = \emptyset$ ou si $U \cap V \neq \emptyset$ et

- $\varphi(U \cap V)$ est un ouvert de \mathbb{R}^m
- $\psi(U \cap V)$ est un ouvert de \mathbb{R}^n
- $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ est un difféomorphisme de classe C^k ⁽¹⁾

Observons que *des cartes compatibles dont les domaines ne sont pas disjoints ont même dimension*. En effet, avec les notations de la définition ci-dessus, la différentielle du changement de coordonnées locales,

$$(\psi \circ \varphi^{-1})_* : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

est une application linéaire non singulière, ce qui implique que m soit égal à n , tous deux valant le rang de cette application.

La remarque suivante est fort utile. Elle est par ailleurs immédiate.

REMARQUE 1.3. *Si (U, φ) est une carte de M et si ω est un ouvert de $\varphi(U)$, alors $(\varphi^{-1}(\omega), \varphi)$ est aussi une carte de M . Elle est ∞ -compatible avec (U, φ) .*

Un k -atlas de M est un ensemble de cartes k -compatibles de M dont les domaines recouvrent M .

A titre d'exemple, on vérifie sans difficulté que les cartes (U_i, φ_i) de $\mathbb{R}^m P$ sont deux à deux ∞ -compatibles. Elles forment donc un atlas de $\mathbb{R}^m P$. De même, si Σ est une variété plongée dans \mathbb{R}^m , de classe C^k , les cartes qu'on déduit (cf. l'exemple 1.1) de ses paramétrages locaux sont deux à deux k -compatibles et forment un atlas de Σ .

1.3. Variété.

LEMME 1.4. *Si des cartes (U, φ) et (V, ψ) de M sont k -compatibles avec les cartes d'un atlas \mathcal{A} de M , alors elles sont k -compatibles.*

DÉMONSTRATION. Soit $a \in U \cap V$. Il existe $(W, \theta) \in \mathcal{A}$ dont le domaine contient a . Les cartes (U, φ) et (V, ψ) étant k -compatibles avec (W, θ) ,

$$\theta(U \cap V \cap W) = \theta(U \cap W) \cap \theta(V \cap W)$$

est un ouvert de $\theta(W)$ et, dès lors,

$$\varphi(U \cap V \cap W) = (\varphi \circ \theta^{-1})(\theta(U \cap V \cap W))$$

1. C'est-à-dire une bijection de classe C^k dont l'inverse est de classe C^k .

et

$$\psi(U \cap V \cap W) = (\psi \circ \theta^{-1})(\theta(U \cap V \cap W))$$

sont des ouverts de $\varphi(U)$ et $\psi(V)$ respectivement. Le premier contient $\varphi(a)$, le second $\psi(a)$. En laissant varier a dans $U \cap V$, on obtient des ouverts qui recouvrent respectivement $\varphi(U \cap V)$ et $\psi(U \cap V)$ lesquels sont donc des ouverts. De plus, dans chaque $\varphi(U \cap V \cap W)$,

$$\psi \circ \varphi^{-1} = (\psi \circ \theta^{-1}) \circ (\theta \circ \varphi^{-1})$$

est un difféomorphisme de classe C^k . \square

La relation de k -compatibilité n'est pas une équivalence dans l'ensemble des cartes d'un ensemble M . Elle n'est pas transitive. Deux cartes incompatibles sont en effet compatibles avec une troisième carte dont le domaine est disjoint de chacune d'elle. Cependant, vu le lemme ci-dessus,

PROPOSITION 1.5. *Tout atlas de M est contenu dans un unique atlas maximal pour l'inclusion.*

DÉMONSTRATION. Soit un atlas \mathcal{A} de M . D'après le Lemme 1.4, l'ensemble des cartes de M compatibles avec celles de \mathcal{A} est un atlas \mathcal{A}' contenant \mathcal{A} . Il est maximal : s'il est contenu dans un atlas \mathcal{A}'' , les cartes de ce dernier sont compatibles avec celles de \mathcal{A} et sont donc comprises dans \mathcal{A}' .

Si des atlas \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 contiennent \mathcal{A} , alors leur cartes étant compatibles avec celles de \mathcal{A} , sont compatibles entre elles, à cause du même lemme. L'union $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ est ainsi un atlas de M contenant les \mathcal{A}_i . S'ils sont maximaux, ceux-ci sont donc égaux, à $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$. \square

Un atlas maximal pour l'inclusion est dit *saturé*.

Une *structure de variété de classe C^k sur l'ensemble M* est un atlas saturé \mathcal{A} de M . Le couple (M, \mathcal{A}) est alors une *variété de classe C^k* ⁽²⁾. Souvent, pour définir une structure de variété de classe C^k sur M , on donne un atlas de M et on convient de munir M de la structure définie par l'atlas saturé \mathcal{A} qui le contient.

Une *carte de la variété (M, \mathcal{A})* est alors une carte de l'atlas saturé \mathcal{A} .

PROPOSITION 1.6. *Si (U, φ) est une carte d'une variété (M, \mathcal{A}) , les cartes $(\varphi^{-1}(\omega), \varphi)$, où ω est un ouvert de $\varphi(U)$ sont aussi des cartes de cette variété.*

DÉMONSTRATION. Soit un ouvert ω de $\varphi(U)$. D'après la remarque 1.3, $(\Omega = \varphi^{-1}(\omega), \varphi|_{\Omega})$ est une carte de M . Nous allons montrer qu'elle est compatible avec toute carte $(V, \psi) \in \mathcal{A}$. Supposons que V rencontre

2. Si on ne précise pas k , on parle de variété *différentielle*

Ω . Il rencontre donc U . L'application $\psi \circ \varphi^{-1}$ est donc un difféomorphisme entre les ouverts $\varphi(U \cap V)$ et $\psi(U \cap V)$ car les cartes (U, φ) et (V, ψ) sont compatibles. L'ensemble

$$\varphi(\Omega \cap V) = \omega \cap \varphi(U \cap V)$$

est donc ouvert dans $\varphi(U)$ puisque ω est ouvert. Dès lors

$$\psi(\Omega \cap V) = (\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(\Omega \cap V))$$

est un ouvert de $\psi(V)$. Enfin, entre ces ouverts, $\psi \circ \varphi^{-1}$ est un difféomorphisme. \square

On dira que les cartes de la forme $(\varphi^{-1}(\omega), \varphi)$ sont obtenues *par restriction* du domaine de la carte (U, φ) .

Dans la suite, s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'atlas, nous ne mentionnerons pas explicitement ce dernier et nous parlerons de la variété M plutôt que de (M, \mathcal{A}) . Semblablement, une carte de M sera une carte de l'atlas saturé définissant sa structure de variété.

L'ensemble des paramétrages d'une variété plongée V dans \mathbb{R}^m forme un atlas de V . Cet atlas définit donc une structure de variété différentielle sur V , dite *canonique* ou *naturelle*. Dans la suite, sauf mention explicite du contraire, c'est toujours à la structure canonique que nous nous référerons lorsque nous considérerons les variétés plongées comme des variétés différentielles. A titre d'exercice, le lecteur est invité à prouver que la structure de variété de S^2 définie par l'ensemble des deux cartes décrites à l'exemple 1.1 est sa structure canonique.

L'espace projectif $\mathbb{R}^m P$ devient une variété différentielle, de classe C^∞ , lorsqu'on le munit de l'atlas formé des cartes introduites dans l'exemple 1.2. Sans autre précision, c'est également à cette structure que nous nous référerons dorénavant lorsque nous parlerons de *l'espace projectif* $\mathbb{R}^m P$. Les cartes en questions seront dites *canoniques*.

Nous aurons l'occasion de rencontrer d'autres exemples mais en voici qui montrent qu'un même ensemble est susceptible de posséder plusieurs structures de variétés différentes.

Le couple $(\mathbb{R}, x \mapsto x^3)$ est une carte de \mathbb{R} . Elle n'est pas compatible avec la carte $(\mathbb{R}, x \mapsto x)$, dite *canonique* ⁽³⁾, qui fait de \mathbb{R} une variété plongée. En effet, l'application $x \mapsto x^{1/3}$ n'est pas de classe C^1 car elle n'est pas dérivable en 0. Ainsi, \mathbb{R} possède au moins deux structures de variété de classe C^∞ ⁽⁴⁾.

Les couples $(\mathbb{R} \times \{a\}, (x, a) \mapsto x)$, $a \in \mathbb{R}$, forment un atlas de \mathbb{R}^2 . Ces cartes sont en effet compatibles puisque leurs domaines sont disjoints deux à deux. Elles définissent une structure de variété différente

3. Plus généralement, $(\mathbb{R}^m, x \mapsto x)$ est la carte *canonique* de \mathbb{R}^m ; elle définit sa structure naturelle de variété plongée.

4. Elles sont cependant difféomorphes (voir plus bas la définition de cette notion).

de la structure canonique de \mathbb{R}^2 . En effet, elles sont de dimension 1 alors que les cartes de la structure canonique sont de dimension 2.

La *dimension* d'une variété M en un point a est la dimension des cartes de M dont le domaine contient a .

REMARQUE 1.7. *Lorsque M est un espace euclidien \mathbb{R}^m , on le ramènera toujours, sauf mention explicite du contraire, à la carte canonique $(\mathbb{R}^m, x \mapsto x)$.*

2. Intermède topologique

2.1. Topologie d'une variété. Une variété différentielle M possède canoniquement une topologie. Si nécessaire, on la notera τ_M . Ses ouverts sont les unions de domaines de cartes de M . Les axiomes des ouverts sont faciles à vérifier. Tout d'abord, il est évident qu'une union d'éléments de τ_M est toujours un élément de τ_M . En utilisant la remarque 1.6, on voit aussi que l'intersection de deux éléments de τ_M est toujours un élément de τ_M .

La même remarque montre que si (U, φ) est une carte de M et si ω est un ouvert de $\varphi(U)$ alors $\varphi^{-1}(\omega)$ est un ouvert de M . En particulier, $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ est continu. En fait, $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ est un homéomorphisme. En effet, φ est également une application ouverte : soient un ouvert $\Omega \subset U$ de M et $a \in \Omega$. Il existe une carte (V, ψ) de M dont le domaine contient a et est inclus dans Ω . Elle est compatible avec (U, φ) . Par conséquent, $\varphi(U \cap V) = \varphi(V)$ est un ouvert de $\varphi(U)$ contenant $\varphi(a)$ et inclus dans $\varphi(\Omega)$, lequel est donc ouvert.

La topologie d'une variété différentielle est déterminée par un quelconque atlas de cette variété. Par exemple, les deux cartes de S^2 données dans l'exemple 1.1 suffisent à déterminer la topologie induite de S^2 .

PROPOSITION 2.1. *Soient un atlas \mathcal{A} d'une variété différentielle M et $\Omega \subset M$. On a $\Omega \in \tau_M$ si et seulement si Ω est union de domaines de cartes de M obtenues par restriction du domaine de cartes de \mathcal{A} .*

DÉMONSTRATION. Il suffit de démontrer que si $\Omega \in \tau_M$ alors il est union de tels domaines car la proposition réciproque est trivialement vraie. Supposons donc que Ω soit un élément de τ_M . Soit $a \in \Omega$. Il existe une carte (U, φ) de M telle que $a \in U \subset \Omega$. Il existe aussi une carte $(V, \psi) \in \mathcal{A}$ dont le domaine contient a . Les cartes (U, φ) et (V, ψ) sont compatibles. Par conséquent, $\omega = \psi(U \cap V)$ est un ouvert de $\psi(V)$. Le point a est donc contenu dans le domaine $\psi^{-1}(\omega) = U \cap V \subset \Omega$ d'une carte obtenue par restriction du domaine d'une carte de \mathcal{A} . \square

REMARQUE 2.2. *Si M est une variété plongée dans \mathbb{R}^m , alors pour la structure canonique de variété différentielle, τ_M est la topologie induite.*

La vérification est facile.

2.2. Topologie de l'espace projectif. Nous allons consacrer quelques paragraphes à la découverte de la topologie de $\mathbb{R}^m P$.

L'espace projectif $\mathbb{R}^m P$ est le quotient de $\mathbb{R}^{m+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ par la relation d'équivalence

$$\mathbf{v} \equiv \mathbf{u} \iff \mathbf{v} \in \mathbb{R}\mathbf{u}$$

En effet les classes d'équivalence de cette relation sont exactement les droites vectorielles de \mathbb{R}^{m+1} privées de $\mathbf{0}$. Nous noterons π le passage au quotient.

Dans cette section, τ_m désigne la topologie de variété de $\mathbb{R}^m P$.

PROPOSITION 2.3. *On a $\omega \in \tau_m$ si et seulement si il existe un ouvert Ω de $\mathbb{R}^{m+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ tel que $\omega = \pi(\Omega)$.*

DÉMONSTRATION. Soient $\omega \in \tau_m$ et $a \in \omega$. Il existe $i \in \{1, \dots, m\}$ et un ouvert α de \mathbb{R}^m tels que $a \in \varphi_i^{-1}(\alpha) \subset \omega$. L'ensemble

$$\Omega_a = \psi_i^{-1}(\alpha)$$

où

$$\psi_i : \mathbf{u} \in \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{m+1} \mid v^i \neq 0\} \mapsto \left(\frac{u^1}{u^i}, \dots, \hat{i}, \dots, \frac{u^{m+1}}{u^i} \right) \in \mathbb{R}^m$$

est un ouvert de $\mathbb{R}^{m+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ car cette application est continue. De plus, $\pi(\Omega_a) = \varphi_i^{-1}(\alpha)$. On a $\omega = \pi(\Omega)$ où Ω est l'ouvert union de tous ces Ω_a .

Inversement, soit un ouvert Ω de $\mathbb{R}^{m+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ et montrons que $\pi(\Omega) \in \tau_m$. On peut remplacer Ω par

$$\Omega' = \bigcup_{r \in \mathbb{R}, r \neq 0} r\Omega$$

C'est en effet un ouvert dont la projection sur $\mathbb{R}^m P$ est la même que celle de Ω . Cela posé,

$$\pi(\Omega) = \bigcup_{i=1}^{m+1} \varphi_i^{-1}(\alpha_i)$$

où

$$\alpha_i = \zeta_i^{-1}(\Omega')$$

est un ouvert de \mathbb{R}^m puisque l'application

$$\zeta_i : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mapsto (x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^i, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^{m+1}$$

est continue. Ainsi, $\pi(\Omega)$ est union de domaines de cartes obtenues par restriction des cartes canoniques. C'est donc un élément de τ_m . \square

Voici une autre description des ouverts de $\mathbb{R}^m P$.

PROPOSITION 2.4. *On a $\omega \in \tau_m$ si et seulement si $\pi^{-1}(\omega)$ est un ouvert de \mathbb{R}^{m+1} .*

DÉMONSTRATION. Si $\omega \in \tau_m$, alors il existe un ouvert Ω de $\mathbb{R}^{m+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ tel que $\omega = \pi(\Omega)$. Donc

$$\pi^{-1}(\omega) = \bigcup_{r \in \mathbb{R}, r \neq 0} r\Omega$$

est aussi un ouvert de $\mathbb{R}^{m+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$. Inversement, si $\pi^{-1}(\omega)$ est un ouvert, alors $\omega \in \tau_m$. \square

La proposition précédente montre que la topologie τ_m est la topologie finale pour l'application

$$\pi : \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{R}^m P$$

C'est donc la topologie quotient associée à l'équivalence \equiv dont $\mathbb{R}^m P$ est l'ensemble quotient donnée plus haut. En particulier

COROLLAIRE 2.5. π est continu.

Un autre corollaire de ce qui précède montre que $\mathbb{R}^m P$ est compact.

COROLLAIRE 2.6. $(\mathbb{R}^m P, \tau_m)$ est compact.

DÉMONSTRATION. En effet, $\mathbb{R}^m P = \pi(S^m)$. \square

Avertissement. Dans la suite, sauf mention explicite du contraire, nous supposons que les variétés sont *séparées*, c'est-à-dire que deux points distincts appartiennent toujours à des domaines de cartes disjoints. C'est toujours le cas de la topologie naturelle des variétés plongées dans \mathbb{R}^m . A cause de cette hypothèse, *les compacts de M sont fermés*.

Il n'est pas difficile de vérifier que les espaces projectifs sont séparés. La vérification du caractère séparé des variétés qui seront introduites ultérieurement sera laissée à titre d'exercice.

Nous supposons également que les variétés sont à *base dénombrable*. Cela signifie qu'il existe un ensemble d'ouverts qui est dénombrable et tel que tout ouvert de la variété soit union d'éléments de cet ensemble (appelé *base* de la topologie de la variété). Les ouverts des espaces \mathbb{R}^m sont à base dénombrable (il suffit de prendre pour base de la topologie d'un tel ouvert l'ensemble des boules ouvertes de rayon rationnel qui lui sont incluses). Il en résulte immédiatement qu'une variété définie par un atlas fini ou dénombrable est à base dénombrable. Inversement, une variété à base dénombrable admet un atlas dénombrable. Cela résulte du théorème de Lindelöf⁽⁵⁾. A l'aide de ces faits, il sera facile par la suite de vérifier, à titre d'exercice, que les variétés introduites ultérieurement sont à base dénombrable.

Une des conséquences du fait qu'une variété est à base dénombrable est l'existence de partitions de l'unité, notion introduite à la fin de la Section 4.

5. Tout recouvrement ouvert d'un espace topologique à base dénombrable, contient un recouvrement dénombrable

3. Applications différentiables

Soient des variétés différentielles M et N , de classe C^k . Une application $f : M \rightarrow N$ est de classe C^l , avec $0 \leq l \leq k$, si, pour tout $a \in M$, il existe des cartes (U, φ) de M et (V, ψ) de N telles que $a \in U$, $f(U) \subset V$ et

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$$

soit de classe C^l . Cette application s'appelle *l'expression locale* de f dans les cartes (U, φ) et (V, ψ) .

Il est utile d'observer que

REMARQUE 3.1. *Si f est de classe C^l , alors ses expressions locales dans toutes cartes (U, φ) et (V, ψ) telles que $f(U) \subset V$ sont de classe C^l .*

En effet, soient $u \in \varphi(U)$, $a = \varphi^{-1}(u)$ et des cartes (U_0, φ_0) et (V_0, ψ_0) dans lesquelles l'expression locale de f est de classe C^l , avec $a \in U_0$. Il suffit de noter que

$$(1) \quad \omega = (\varphi_0 \circ \varphi^{-1})^{-1}(\psi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1})^{-1}(\psi_0(V \cap V_0))$$

est un ouvert de $\varphi(U)$, contenant u , et que, dans celui-ci,

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = (\psi \circ \psi_0^{-1}) \circ (\psi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1}) \circ (\varphi_0 \circ \varphi^{-1}),$$

ce qui prouve que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est de classe C^l au voisinage de u puisque les changements de cartes $\psi \circ \psi_0^{-1}$ et $\varphi_0 \circ \varphi^{-1}$ sont des difféomorphismes de classe C^l . En ce qui concerne (1), on remarque que $\psi_0(V \cap V_0)$ est ouvert par définition de la compatibilité des cartes, ensuite on conclut en utilisant le fait que $\psi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1}$ et $\varphi_0 \circ \varphi^{-1}$ sont continus.

Chemin faisant, nous venons de voir que

REMARQUE 3.2. *Si f est de classe C^l et si les domaines des cartes (U, φ) et (V, ψ) contiennent a et $f(a)$ respectivement, alors on peut restreindre U pour qu'en outre $f(U) \subset V$.*

En particulier, *les fonctions de classe C^k entre variétés sont continues*. Nous utiliserons ce fait librement dans la suite, de même que le suivant.

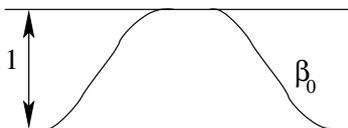
REMARQUE 3.3. *Soit une carte (U, φ) . Si le support de $\alpha_0 \in C^k(\varphi(U), \mathbb{R})$ est compact, alors*

$$\alpha : x \in M \mapsto \begin{cases} \alpha_0(\varphi(x)) & \text{si } x \in U \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

appartient à $C^k(M, \mathbb{R})$.

Voici comment on peut vérifier ceci. Soit K le compact $\varphi^{-1}(\text{supp } \alpha_0)$ de U ⁶. Soit $a \in M$. Nous devons vérifier qu'il existe une carte de M dont le domaine contient a et dans laquelle l'expression locale de

6. Comme $\text{supp } \alpha_0$ est compact, K est compact car φ^{-1} est continu.

FIGURE 1. Allure de β_0 .

α est de classe C^k . Si $a \in U$, on peut prendre (U, φ) , dans laquelle cette expression locale est α_0 . Si $a \notin U$, alors $a \notin K$. Comme K est compact, il est fermé (puisque la topologie de M est séparée). Son complémentaire est donc ouvert : il existe une carte (V, ψ) dont le domaine contient a et est disjoint de K . L'expression locale de α dans cette carte est nulle.

Avec la remarque précédente, on construit facilement des fonctions ayant un comportement prescrit en a . En effet, En prenant α_0 de la forme $\beta_0 f$ où β_0 est à support compact dans $\varphi(U)$, est à valeurs dans $[0, 1]$ et vaut 1 dans un voisinage de $\varphi(a)$, on obtient une fonction α dont l'expression locale coïncide avec $f \circ \varphi$ au voisinage de a .

EXEMPLE 3.4. *Plongement d'une variété plongée dans \mathbb{R}^m .*

Si V est une variété plongée dans \mathbb{R}^m , de classe C^k , alors l'identité $id_V : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application de classe C^k . En effet, pour tout paramétrage (ω, ψ) de V , l'expression locale de id_V dans les cartes $(\psi^{-1}(\omega), \psi^{-1})$ et $(\mathbb{R}^m, x \mapsto x)$ est ψ , qui est de classe C^k par hypothèse.

EXEMPLE 3.5. *Les homographies h_A .*

Une application linéaire A non singulière de \mathbb{R}^{m+1} dans lui-même induit une bijection h_A de $\mathbb{R}^m P$ dans lui-même. Elle transforme la droite d de vecteur directeur ξ en $h_A(d) = \mathbb{R}A(\xi)$. Elle est de classe C^∞ . Utilisons pour vérifier cela les cartes introduites dans l'exemple 1.2. En supposant, pour simplifier les notations, que $\xi^0, (A\xi)^0 \neq 0$, l'expression locale $\varphi_0 \circ h_A \circ \varphi_0^{-1}$ de h_A dans la carte (U_0, φ_0) est

$$(x^1, \dots, x^m) \mapsto \left(\frac{A_0^1 + \sum_{1 \leq i \leq m} A_i^1 x^i}{A_0^0 + \sum_{1 \leq i \leq m} A_i^0 x^i}, \dots, \frac{A_0^m + \sum_{1 \leq i \leq m} A_i^m x^i}{A_0^0 + \sum_{1 \leq i \leq m} A_i^0 x^i} \right).$$

Cette application n'étant définie que dans le complémentaire ω de l'hyperplan d'équation $A_0^0 + \sum_{1 \leq i \leq m} A_i^0 x^i = 0$, il faut, pour ce conformer à la définition des applications différentiables, restreindre le domaine de la carte (U_0, φ_0) à $\varphi_0^{-1}(\omega)$.

PROPOSITION 3.6. *Si les applications $g : M \rightarrow N$ et $f : N \rightarrow L$ sont de classe C^l , alors $f \circ g : M \rightarrow L$ est de classe C^l .*

DÉMONSTRATION. Soient $a \in M$, $b = g(a)$ et des cartes (U, φ) , (V, ψ) et (W, θ) telles que $a \in U$, $b \in V$ et $f(b) \in W$. Quitte à restreindre V d'abord, U ensuite, nous pouvons supposer que $f(V) \subset W$ puis

$g(U) \subset V$. L'expression locale de $f \circ g$ dans les cartes (U, φ) et (W, θ) se factorise alors en applications de classe C^l :

$$\theta \circ (f \circ g) \circ \varphi^{-1} = (\theta \circ f \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ g \circ \varphi^{-1}).$$

Elle est donc de classe C^l . \square

Nous noterons $C^l(M, N)$ l'ensemble des applications de classe C^l de M dans N . Lorsque $N = \mathbb{R}^n$, c'est un espace vectoriel sur \mathbb{R} , les opérations vectorielles étant définies point par point. Lorsque $N = \mathbb{R}$, c'est même une algèbre, la multiplication étant définie également ponctuellement.

Nous appellerons *courbe de M* (de classe C^l si il faut le préciser) les éléments de $C^l(I, M)$, où I est un intervalle ouvert de \mathbb{R} .

Une bijection $f : M \rightarrow N$ est un *difféomorphisme* de classe C^k si f et f^{-1} sont de classe C^k . Si $f \in C^k(M, N)$ est un difféomorphisme, alors il transforme les cartes (U, φ) de M en des cartes $(f(U), \varphi \circ f^{-1})$ de N . De plus, toutes les cartes de N sont de cette forme. De ce fait, on considère généralement que, du point de vue de la géométrie différentielle, des variétés difféomorphes sont égales.

Avertissement. Désormais, nous ne considérerons plus, sauf mention explicite du contraire, que des variétés de classe C^∞ .

3.1. Compléments. Voici quelques exemples supplémentaires de variétés et d'applications différentiables.

L'espace projectif \mathbb{R}^1P . Toute droite $d \in \mathbb{R}^1P$ coupe le cercle $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ en deux points diamétralement opposés $\pm z$. Montrer que l'application $d \mapsto z^2$ est un difféomorphisme (de classe C^∞) de \mathbb{R}^1P sur S^1 .

Applications à valeurs dans une variété plongée. Soient une variété M , une variété V plongée dans \mathbb{R}^n et une application $f : M \rightarrow V$. On peut également voir f comme étant une application de M dans \mathbb{R}^n . Montrer que $f \in C^\infty(M, V)$ si et seulement si $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$.

Application définie sur une variété plongée. Soient une variété V plongée dans \mathbb{R}^m et $a \in V$. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert Ω de a dans \mathbb{R}^m tel que pour toute variété M et tout $f \in C^\infty(V, M)$, il existe $F \in C^\infty(\Omega, M)$ tel que $f|_{\Omega \cap V} = F|_{\Omega \cap V}$.

L'espace projectif \mathbb{R}^3P . Pour rappel, un quaternion unitaire q induit une rotation $r_q : h \mapsto qh\bar{q}$ de l'espace \mathcal{P} des quaternions purs (i.e. de partie réelle nulle), la base i, j, k de ce dernier étant orthonormée et positive. De plus, la correspondance $q \mapsto r_q$ est un homomorphisme surjectif de $S^3 = \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\}$ sur le groupe $SO(\mathcal{P})$, dont le noyau est $\{-1, 1\}$. Toute droite $d \in \mathbb{R}^3P$ coupant S^3 en deux points diamétralement opposés $\pm q$, montrer que l'application $d \mapsto r_q$ est un difféomorphisme de classe C^∞ .

La grassmannienne des p -plans de \mathbb{R}^m . L'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension p de \mathbb{R}^m (appelés aussi p -plans de \mathbb{R}^m) est noté $G_m^p(\mathbb{R})$.

Soit $I \subset \{1, \dots, m\}$, $\#I = p$. On désigne par I' le complémentaire de I et pour tout $A \in \mathbb{R}_p^m$, on note A^I la matrice formée en ne conservant dans A que les lignes dont les indices sont dans I . Pour $B \in \mathbb{R}_m^p$, B_I s'obtient en conservant les colonnes de B dont les numéros sont dans I .

a) Disposés en colonne, les éléments d'une base de $\alpha \in G_m^p(\mathbb{R})$ forment une matrice $\xi = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p) \in \mathbb{R}_p^m$, de rang p . On peut choisir I pour que ξ^I soit non singulier. On pose alors

$$\varphi^I(\alpha) = \xi^{I'} (\xi^I)^{-1}.$$

Montrer que $\varphi^I(\alpha)$ ne dépend que de α , que φ^I est une bijection de l'ensemble U^I des p -plans supplémentaires de $\mathbb{R}^{I'} = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x^i = 0, \forall i \in I\}$ sur \mathbb{R}_p^{m-p} et que les cartes (U^I, φ^I) de $G_m^p(\mathbb{R})$ sont compatibles.

Ces cartes définissent ainsi un atlas de $G_m^p(\mathbb{R})$. Muni de la structure de variété correspondante, $G_m^p(\mathbb{R})$ s'appelle la variété *grassmannienne des p -plans de \mathbb{R}^m* .

b) Un sous-espace α peut aussi être décrit par des équations cartésiennes : il est l'ensemble des solutions d'un système d'équations $\Xi \mathbf{x} = \mathbf{0}$, où $\Xi \in \mathbb{R}_{m-p}^m$ est de rang $m - p$. La matrice Ξ_J est donc non singulière pour un certain J , $\#J = m - p$. On pose alors

$$\varphi_J(\alpha) = \Xi_J^{-1} \Xi_{J'}.$$

Montrer que $\varphi_J(\alpha)$ est indépendant des équations cartésiennes choisies, que (U_J, φ_J) est une carte de $G_m^p(\mathbb{R})$, où $U_J = U^{J'}$, et que les cartes ainsi obtenues sont compatibles entre elles.

c) Montrer que les cartes (U^I, φ^I) et (U_J, φ_J) sont toujours compatibles. [Suggestion : vérifier d'abord que $\varphi_{I'} \circ (\varphi^I)^{-1} : A \mapsto -A$.]

Le passage à l'orthogonal. Le complément orthogonal de α est par définition le sous-espace α^\perp formé des éléments de \mathbb{R}^m perpendiculaires à ceux de α . Montrer que l'application $\alpha \in G_m^p(\mathbb{R}) \mapsto \alpha^\perp \in G_m^{m-p}(\mathbb{R})$ est de classe C^∞ .

L'application de Gauss. Montrer que V étant une variété plongée dans \mathbb{R}^m , de dimension p et de classe C^∞ , l'application $\tau : x \in V \mapsto T_x V \in G_m^p(\mathbb{R})$ est de classe C^∞ . ($T_x V$ désigne l'espace tangent à V en x , au sens des variétés plongées : c'est, pour rappel, l'ensemble des dérivées en $t = 0$ aux courbes de \mathbb{R}^m dont l'image est contenue dans V et qui passent par x en $t = 0$.)

4. L'exercice de Milnor

On appelle ainsi le théorème suivant qui montre à quel point la structure d'une variété différentielle est déterminée par celle de l'algèbre de ses fonctions à valeurs réelles.

THÉORÈME 4.1. *Soient des variétés différentielles M et N . Une application linéaire $\Phi : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(N, \mathbb{R})$ est un isomorphisme d'algèbres⁽⁷⁾ si et seulement si il existe un difféomorphisme $\varphi : M \rightarrow N$ tel que*

$$(2) \quad \Phi(f) = f \circ \varphi^{-1}, \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R}).$$

Pour la démonstration de ce théorème, nous aurons besoin de la proposition suivante.

PROPOSITION 4.2. *Soit une variété différentielle M .*

a) *Pour tout $a \in M$, l'ensemble*

$$I_a = \{f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \mid f(a) = 0\}$$

est un idéal de $C^\infty(M, \mathbb{R})$ ⁽⁸⁾. Il est de codimension 1.

b) *Si $I \subset C^\infty(M, \mathbb{R})$ est un idéal de codimension 1 alors il existe $a \in M$ tel que $I = I_a$.*

c) *Si $I_a = I_b$ alors $a = b$.*

Preuve du théorème 4.1. Il est facile de vérifier que les applications Φ de la forme (2) sont des isomorphismes d'algèbres. Nous allons nous contenter de prouver la réciproque. Soit donc un isomorphisme d'algèbres $\Phi : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(N, \mathbb{R})$. Il induit une bijection entre les ensembles d'idéaux de codimension 1 de ces algèbres. D'après la proposition 4.2, il existe donc des applications $\varphi : M \rightarrow N$ et $\psi : N \rightarrow M$ telles que

$$\Phi(I_x) = I_{\varphi(x)}, \forall x \in M,$$

et

$$\Phi^{-1}(I_y) = I_{\psi(y)}, \forall y \in N.$$

Il est clair que φ et ψ sont des applications réciproques l'une de l'autre. De plus, on a

$$(3) \quad \Phi(f) = f \circ \varphi^{-1}, \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R}).$$

7. Par algèbre on entend un espace vectoriel \mathcal{A} munit d'une application bilinéaire $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, la multiplication. Celle-ci est notée généralement par concaténation : $(u, v) \mapsto uv$. Un isomorphisme d'algèbres est alors une bijection linéaire $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ vérifiant $\Phi(uv) = \Phi(u)\Phi(v)$ pour tous $u, v \in \mathcal{A}$. Si les algèbres possèdent une unité - notée généralement 1, on demande aussi que $\Phi(1) = 1$.

8. Un idéal à gauche d'une algèbre \mathcal{A} est un sous-espace vectoriel I de \mathcal{A} tel que $\mathcal{A}I \subset I$. On définit de façon similaire un idéal à droite. Lorsque \mathcal{A} est commutatif, les deux notions coïncident et on parle simplement d'idéaux.

En effet, pour tout a , on peut décomposer une fonction f en la somme d'une constante et d'une fonction nulle en a :

$$f = f(a)1 + (f - f(a)).$$

En appliquant Φ aux deux membres de cette relation puis en évaluant le résultat en $\varphi(a)$, il vient

$$\Phi(f)(\varphi(a)) = f(a)\Phi(1) + \Phi(f - f(a))(\varphi(a)) = f(a)$$

car $\Phi(f - f(a)) \in I_{\varphi(a)}$ (et $\Phi(1) = 1$.) Il suffit de remplacer a par $\varphi^{-1}(y)$, $y \in N$, pour obtenir (3).

Nous devons, pour terminer, montrer que φ est de classe C^∞ . En remplaçant Φ par son inverse, cela suffira pour vérifier que φ^{-1} l'est aussi et donc que φ est un difféomorphisme.

Commençons par vérifier que φ est continu. Soient donc un ouvert non vide V de N et $a \in \varphi^{-1}(V)$. On peut construire une fonction $g \in C^\infty(N, \mathbb{R})$ telle que $g(\varphi(a)) \neq 0$ et dont le support soit inclus dans V . Posons $f = \Phi^{-1}(g) = g \circ \varphi$. Si $f(x) \neq 0$, alors $\varphi(x) \in \text{supp}g$. Par conséquent, l'image par φ de l'ouvert $\{x \in M : f(x) \neq 0\}$ de M , qui contient a , est incluse dans V . D'où la continuité de φ .

Soient $a \in M$, $b = \varphi(a) \in N$ et une carte (V, β) de N dont le domaine contient b . Quitte à rétrécir V , nous pouvons supposer qu'il existe des fonctions $g^1, \dots, g^n \in C^\infty(N)$ telles que

$$g^i(y) = \beta^i(y), \forall y \in V.$$

Les fonctions $f^i = \Phi^{-1}(g^i) = g^i \circ \varphi$ sont de classe C^∞ sur M . Soit une carte (U, α) de M dont le domaine contient a . Par continuité de φ , quitte à restreindre U , on peut supposer que $\varphi(U) \subset V$. Pour u dans $\alpha(U)$, on a donc $\beta^i \circ \varphi \circ \alpha^{-1}(u) = f^i \circ \alpha^{-1}(u)$. Par conséquent, l'expression locale $\beta \circ \varphi \circ \alpha^{-1}$ de φ est de classe C^∞ . \square

Preuve de la proposition 4.2. a) Il est clair que I_a est un idéal. L'application

$$f \text{ mod } I_a \mapsto f(a)$$

étant une bijection entre $C^\infty(M, \mathbb{R})/I_a$ et \mathbb{R} , I_a est de codimension 1.

b) Nous allons prouver b) par l'absurde et, dans ce but, nous admettrons que M possède une fonction propre, f_0 ⁽⁹⁾.

Soit un idéal I de codimension 1 dans $C^\infty(M, \mathbb{R})$ qui ne soit pas de la forme I_a ⁽¹⁰⁾. Il ne contient pas 1⁽¹¹⁾. Il existe donc $r \in \mathbb{R}$ tel que $u_0 = f_0 - r1 \in I$. Puisque f_0 est propre, l'ensemble $K = u_0^{-1}(0)$ est un compact de M . Comme I n'est de la forme I_a pour aucun a , à chaque point de K , on peut associer un ouvert qui le contient et un

9. Par définition, $f_0^{-1}([a, b])$ est compact pour tous $a, b \in \mathbb{R}$. Cette hypothèse n'est pas très contraignante mais nous ne saurions pas la discuter complètement ici. Par exemple, toutes les variétés plongées dans un espace euclidien y satisfont.

10. Du fait que I et les I_a sont de même codimension, cela revient à supposer que, quelque soit a , $I \not\subset I_a$.

11. Sinon, il serait égal à $C^\infty(M, \mathbb{R})$.

élément de I qui ne s'annule pas dans cet ouvert. Par compacité, on peut recouvrir K à l'aide d'un nombre fini de ces ouverts : il existe des ouverts $\omega_1, \dots, \omega_p$ dont l'union contient K et $u_1, \dots, u_p \in I$ tels que u_i ne s'annule en aucun point de ω_i . Posons $\omega_0 = M \setminus K$. La fonction

$$u = \sum_{0 \leq i \leq p} u_i^2$$

est un élément de I , qui ne s'annule en aucun point. Il en résulte que $I = C^\infty(M, \mathbb{R})$ puisque, pour tout $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, on a

$$f = \frac{f}{u} u \in I. \quad \square$$

Revenons un instant sur l'existence d'une fonction propre. Appelons *partition de l'unité* sur M une suite $\{\alpha_i | i \in \mathbb{N}\}$ d'éléments de $C^\infty(M, \mathbb{R})$, toutes à valeurs positives, dont les supports forment une famille localement finie de compacts et dont la somme

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i$$

converge vers 1. Par définition d'une famille localement finie, pour tout $a \in M$, il existe un ouvert ω de M contenant a et qui n'est rencontré que par un nombre fini de $\text{supp} \alpha_i$. La série ci-dessus converge donc toujours puisque, sur ω , elle se réduit à une somme finie.

PROPOSITION 4.3. *Si $\{\alpha_i | i \in \mathbb{N}\}$ est une partition de l'unité de M , alors*

$$f : x \mapsto \sum_{i=0}^{+\infty} i \alpha_i(x)$$

est une fonction propre de M .

DÉMONSTRATION. La série définissant f converge vers une fonction différentiable car, de nouveau, c'est localement une somme finie de fonctions différentiables. Cela étant, pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$f^{-1}([0, n]) \subset \cup_{i=1}^n \text{supp} \alpha_i.$$

En effet, si $x \notin \cup_{i=1}^n \text{supp} \alpha_i$, alors $\alpha_0(x) = \dots = \alpha_n(x) = 0$ et

$$f(x) = \sum_{i>n} i \alpha_i(x) \geq (n+1) \sum_{i>n} \alpha_i(x) = (n+1) \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i(x) = n+1.$$

Soit alors un compact $K \subset \mathbb{R}$. Il existe un entier n tel que $K \subset]-\infty, n]$. Puisque les valeurs de f ne sont pas négatives,

$$f^{-1}(K) = f^{-1}(K \cap [0, +\infty]) \subset f^{-1}([0, n]) \subset \cup_{i=1}^n \text{supp} \alpha_i.$$

Par conséquent, $f^{-1}(K)$ est compact⁽¹²⁾. □

¹². C'est un fermé, par continuité de f , contenu dans un compact.

Nous admettons la propriété suivante.

PROPOSITION 4.4. *Soit un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_\alpha | \alpha \in A\}$ d'une variété M . Il existe une partition de l'unité de M subordonnée à \mathcal{U} [ce qui signifie que le support de chaque élément de la partition est inclus à un des éléments du recouvrement].*

Le fibré tangent

1. Espace tangent

Soit une variété M . L'espace tangent à M en a , noté T_aM , est, par définition, l'ensemble des a -dérivations de l'algèbre $C^\infty(M, \mathbb{R})$, c'est-à-dire des applications linéaires $\mathbf{h} : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \mathbf{h}.f$ vérifiant

$$\mathbf{h}.(fg) = (\mathbf{h}.f)g(a) + f(a)(\mathbf{h}.g), \quad \forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R}).$$

C'est donc un espace vectoriel, sous-espace du dual $C^\infty(M, \mathbb{R})^*$ de $C^\infty(M, \mathbb{R})$ ⁽¹⁾.

A chaque courbe $\gamma : I \rightarrow M$ de classe C^1 de M passant par a correspond une a -dérivation : si $\gamma(s) = a$, il s'agit de

$$\frac{d}{dt}\gamma(s) : f \mapsto \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)|_{t=s}.$$

On l'appelle le *vecteur tangent* à γ en $t = s$, ou en a , s'il est clair que $a = \gamma(s)$. On le note aussi $\dot{\gamma}(s)$.

THÉORÈME 1.1. *Soient une variété M , $a \in M$ et une carte (U, φ) de M dont le domaine contient a .*

a) *L'espace T_aM est l'ensemble des vecteurs tangents en a aux courbes de M passant par a .*

b) *Pour tout $\mathbf{h} \in T_aM$, il existe $(h^1, \dots, h^m) \in \mathbb{R}^m$ tel que*⁽²⁾

$$(4) \quad \mathbf{h}.f = \sum_i h^i \partial_i(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(a)), \quad \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R}).$$

c) *L'application $\varphi_{*a} : \mathbf{h} \mapsto (h^1, \dots, h^m)$ définie par cette relation est une bijection linéaire entre T_aM et \mathbb{R}^m .*

La preuve de ce théorème repose sur le lemme suivant.

LEMME 1.2. *Soient une variété M , $a \in M$ et une carte (U, φ) de M dont le domaine contient a . Il existe des fonctions $u_i \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ telle que, pour tout $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$,*

$$(5) \quad f = f(a) + \sum_{i=1}^m \partial_i(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(a))u_i + \sum_{i=0}^m v_i w_i$$

où les fonctions v_i, w_i s'annulent en a .

1. Certains faits relatifs à la notion de dual sont rappelés au chapitre ??.

2. Dans cet énoncé, ∂_i désigne la dérivée partielle par rapport à la coordonnée locale x^i .

Preuve du théorème 1.1.(i) Appliquons une a -dérivation \mathbf{h} aux deux membres de (5). En tenant compte de ce que $\mathbf{h}.f(a) = 0$ ⁽³⁾ et du fait que les fonctions v_i, w_i sont nulles en a , cela donne

$$\mathbf{h}.f = \sum_i (\mathbf{h}.u_i) \partial_i (f \circ \varphi^{-1})(\varphi(a))$$

Ainsi, $\mathbf{h}.f$ est bien de la forme (4), avec $h^i = \mathbf{h}.u_i$.

(ii) En prenant pour f une fonction dont l'expression locale $f \circ \varphi^{-1}$ coïncide avec x^i au voisinage de $\varphi(a)$, on voit que $h^i = \mathbf{h}.f$ est univoquement déterminé par \mathbf{h} . En particulier, l'application φ_{*a} , qui est donnée par $\mathbf{h} \mapsto (\mathbf{h}.u_1, \dots, \mathbf{h}.u_m)$, est bien définie et est linéaire. Elle est visiblement injective.

(iii) Soit une courbe (I, γ) de M passant par a en $t = s$. Quitte à restreindre I , on peut supposer que $\gamma(I) \subset U$. On a alors

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(s).f &= \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(s) \\ &= \frac{d}{dt}(f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma)(s) \\ &= \sum_i \partial_i (f \circ \varphi^{-1})(\varphi(a)) \frac{d}{dt}(\varphi^i \circ \gamma)(s) \end{aligned}$$

pour tout $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Soit $h = (h^1, \dots, h^m) \in \mathbb{R}^m$. Pour $\epsilon > 0$ assez petit, la courbe $\gamma : t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(a) + th)$ est définie dans $] -\epsilon, \epsilon[$, passe par a en $t = 0$ et vérifie $\frac{d}{dt}(\varphi^i \circ \gamma)(0) = h^i$. Avec la relation précédente (où l'on prend $s = 0$), ceci démontre a) et prouve que φ_{*a} est surjectif. \square

Preuve du lemme 1.2. Grâce à la remarque 3.3, on peut trouver des fonctions u_i de classe $C^\infty(M, \mathbb{R})$ nulle hors de U , à support compact dans U et dont l'expression locale dans la carte (U, φ) coïncide avec $x^i - b^i$ dans un voisinage de $b = \varphi(a)$. L'expression locale de la fonction

$$g : x \in M \mapsto f(x) - f(a) - \sum_{i=1}^m \partial_i (f \circ \varphi^{-1})(b) u_i(x) \in \mathbb{R},$$

s'annule en b ainsi que ses dérivées premières. Il existe donc des fonctions g^{ij} de classe C^∞ telles que, dans $\varphi(U)$,

$$g \circ \varphi^{-1} = \sum_{i,j=1}^m (x^i - b^i)(x^j - b^j) g^{ij}.$$

Considérons une fonction $\alpha_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$, à valeurs dans $[0, 1]$, à support compact contenu dans $\varphi(U)$ et égale à 1 dans un ouvert ω

3. Noter que $\mathbf{h}.1 = 0$ puisque $\mathbf{h}.1 = \mathbf{h}.1^2 = 2\mathbf{h}.1$.

contenant b . Notons α la fonction nulle hors de U et dont α_0 est l'expression locale dans (U, φ) . On a

$$\alpha^2 g = \sum_{i=1}^m v_i w_i$$

où $v_i, w_i \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ont

$$\alpha_0(x^i - b^i) \text{ et } \sum_j \alpha_0(x^j - b^j) g^{ij}$$

pour expressions locales respectives dans la carte (U, φ) . Il reste à montrer que $(1 - \alpha^2)g$ est le produit de deux fonctions nulles en a . Pour cela, on prend une fonction β nulle dans le complémentaire de U , à valeurs dans $[0, 1]$ et dont l'expression locale est à support compact dans ω et vaut 1 dans un voisinage de b . On peut alors écrire

$$(1 - \alpha^2)g = (1 - \beta)(1 - \alpha^2)g$$

et prendre $v_0 = 1 - \beta$, $w_0 = (1 - \alpha^2)g$. \square

Avec les notation du théorème précédent, l'élément $\varphi_{*a}\mathbf{h} = (h^1, \dots, h^m) \in \mathbb{R}^m$ est l'expression locale de \mathbf{h} dans la carte (U, φ) . On voit aussi que l'expression locale de $\dot{\gamma}(s)$ est le vecteur tangent $\frac{d}{dt}\varphi \circ \gamma(s)$ à l'expression locale $\varphi \circ \gamma$ de γ .

REMARQUE 1.3. Dans la suite, nous identifierons l'espace tangent $T_a\mathbb{R}^m$ à \mathbb{R}^m en chaque point a avec \mathbb{R}^m , en confondant la a -dérivation \mathbf{h} d'expression locale (h^1, \dots, h^m) dans la carte canonique $(\mathbb{R}^m, x \mapsto x)$ avec (h^1, \dots, h^m) .

Vu comme a -dérivation, ce dernier est donc l'application

$$f \mapsto \sum_{i=1}^m h^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(a).$$

Dans l'identification ci-dessus, le vecteur tangent $\dot{\gamma}(s)$ à une courbe (I, γ) de \mathbb{R}^m au sens de la définition donnée plus haut est confondu avec

$$\left(\frac{d\gamma^1}{dt}(s), \dots, \frac{d\gamma^m}{dt}(s) \right)$$

lequel correspond à la définition du vecteur tangent à une courbe donnée dans des cours antérieurs.

2. Application linéaire tangente

L'application linéaire tangente à $f \in C^\infty(M, N)$ en $a \in M$ est l'application linéaire $f_{*a} : T_a M \rightarrow T_{f(a)} N$ donnée par

$$f_{*a}\mathbf{h} : g \in C^\infty(N, \mathbb{R}) \mapsto \mathbf{h}.(g \circ f) \in \mathbb{R}.$$

Ainsi définie, l'application linéaire f_{*a} est en effet une $f(a)$ -dérivation de $C^\infty(N, \mathbb{R})$ puisque

$$\begin{aligned} (f_{*a}\mathbf{h})(gg') &= \mathbf{h}((gg') \circ f) \\ &= \mathbf{h}((g \circ f)(g' \circ f)) \\ &= (\mathbf{h} \cdot (g \circ f))(g' \circ f)(a) + (g \circ f)(a)(\mathbf{h} \cdot (g' \circ f)) \\ &= ((f_{*a}\mathbf{h}) \cdot g)g'(f(a)) + g(f(a))((f_{*a}\mathbf{h})g') \end{aligned}$$

pour tous $g, g' \in C^\infty(N, \mathbb{R})$.

PROPOSITION 2.1. *Si les applications $f' : M \rightarrow N$ et $f : N \rightarrow L$ sont de classe C^∞ , alors, pour tout $a \in M$,*

$$(f \circ f')_{*a} = f_{*f'(a)} \circ f'_{*a}.$$

DÉMONSTRATION. De fait, pour tout $\mathbf{h} \in T_a M$ et tout $g \in C^\infty(L, \mathbb{R})$, il vient

$$\begin{aligned} ((f \circ f')_{*a}\mathbf{h}) \cdot g &= \mathbf{h} \cdot (g \circ (f \circ f')) \\ &= \mathbf{h} \cdot ((g \circ f) \circ f') \\ &= (f'_{*a}\mathbf{h}) \cdot (g \circ f) \\ &= (f_{*f'(a)}(f'_{*a}\mathbf{h})) \cdot g \end{aligned}$$

□

3. Quelques remarques en vrac

Voici quelques remarques qui résultent plus ou moins immédiatement des définitions et résultats précédents.

REMARQUE 3.1. *Si $\mathbf{h} = \dot{\gamma}(s)$ alors $f_{*a}\mathbf{h}$ est le vecteur tangent en s à la courbe $f \circ \gamma$ de N .*

En effet,

$$f_{*a}\mathbf{h} \cdot g = \mathbf{h} \cdot (g \circ f) = \frac{d}{dt}((g \circ f) \circ \gamma)(s) = \frac{d}{dt}(g \circ (f \circ \gamma))(s).$$

De là, il résulte que

REMARQUE 3.2. *si (U, φ) et (V, ψ) sont des cartes de M et de N telles que $a \in U$ et $f(U) \subset V$, alors l'expression locale de f_{*a} est $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{*\varphi(a)}(4)$.*

4. L'expression $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{*\varphi(a)}$ désigne la différentielle de $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ comme application entre ouverts d'espaces euclidiens, telle que définie dans des cours antérieurs. Elle coïncide avec celle d'application linéaire tangente si on identifie l'espace tangent à \mathbb{R}^m en chaque point à \mathbb{R}^m , conformément à la remarque 1.3.

En effet, on a vu plus haut que les composantes de l'expression locale de $\mathbf{h} = \dot{\gamma}(s)$ dans la carte (U, φ) sont les $h^i = \frac{d}{dt}(\varphi^i \circ \gamma)(s)$. Celles de l'expression locale de $f_*\mathbf{h}$ dans la carte (V, ψ) sont donc les composantes de la dérivée de $\psi \circ (f \circ \gamma) = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma)$ en $t = s$. Il s'agit donc bien de la dérivée de $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ dans la direction de (h^1, \dots, h^m) .

REMARQUE 3.3. *Espace tangent aux variétés plongées.*

Nous avons observé plus haut qu'une variété V plongée dans \mathbb{R}^m est également une variété au sens abstrait introduit dans ces notes. Nous avons en particulier vu, dans l'exemple 3.4, que l'identité $i_V : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ est de même classe que V . Par conséquent, si $\mathbf{h} = \dot{\gamma}(s) \in T_a V$, alors $i_{V*}\mathbf{h}$ est le vecteur tangent à la courbe $i_V \circ \gamma = \gamma$ de \mathbb{R}^m lequel est, par définition, un élément de $\overrightarrow{T_a \mathbb{R}^m}$. On a donc $i_{V*}T_a V = \overrightarrow{T_a \mathbb{R}^m}$. Les dimensions de $T_a V$ et de $\overrightarrow{T_a \mathbb{R}^m}$ étant égales, il en résulte que i_{V*} est effectivement une bijection.

REMARQUE 3.4. *Vecteurs tangents et fonctions définies dans un ouverts.*

Soit $\mathbf{h} \in T_a M$. Si deux fonctions f et f' coïncident dans un ouvert contenant a , alors il résulte immédiatement de la formule (4) du théorème 1.1 que $\mathbf{h}.f = \mathbf{h}.f'$. On peut donc étendre \mathbf{h} aux fonctions qui sont de classe C^∞ dans un ouvert ω de M contenant a en posant, pour tout $f \in C^\infty(\omega, \mathbb{R})$, $\mathbf{h}.f = \mathbf{h}.\hat{f}$, où la fonction \hat{f} de classe C^∞ dans M coïncide avec f dans un voisinage de a . En particulier, considérant ω muni de la structure de variété dont il hérite de M ⁽⁵⁾, on écrira en conséquence $T_a \omega = T_a M$. Nous utiliserons librement cette égalité dans la suite.

REMARQUE 3.5. *Si (U, φ) est une carte de M , alors $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ est un difféomorphisme et son application linéaire tangente en $a \in U$ coïncide avec l'application notée φ_{*a} au point c) du théorème 1.1.*

C'est immédiat.

REMARQUE 3.6. *Si (U, φ) est une carte de M , alors les vecteurs*

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \varphi_{*a}^{-1} \overrightarrow{e}_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

5. Un ouvert de M étant une union de cartes de M , celles-ci en définissent une structure de variété. C'est toujours de celle-là qu'il sera question à propos de la structure de variété des ouverts de M

constituent une base de T_aM en tout point a de U ⁽⁶⁾. En particulier, si l'expression locale de $\mathbf{h} \in T_aM$ est (h^1, \dots, h^m) , alors on peut écrire

$$\mathbf{h} = \sum_i h^i \partial_i.$$

Par exemple, si M est une variété plongée dans \mathbb{R}^m et si (ω, ψ) en est un paramétrage, les champs ∂_i associés à la carte $(U = \psi(\omega), \varphi = \psi^{-1})$ sont les champs $\partial_1\psi, \dots, \partial_p\psi$.

On a déjà observé que $h^i = \mathbf{h}.x^i$, où x^i désigne la i -ème coordonnée locale. La notation ci-dessus est en parfait accord avec cela puisque tout se passe formellement comme si les applications $x^j : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $\partial_j : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ représentaient les variables ordinaires dans \mathbb{R}^m et les dérivées partielles par rapport à celles-ci. En effet, à l'instar de ces dernières, ces applications vérifient les égalités

$$\partial_i.x^j = \delta_i^j, \quad \forall i, j. \quad (7)$$

Dans \mathbb{R}^m rapporté à la carte canonique (\mathbb{R}^m, id) , on a $\partial_i = \vec{e}_i$.

4. Le fibré TM

On désigne par TM l'ensemble des vecteurs tangents à M et par $\pi_M : TM \rightarrow M$ l'application qui à $\mathbf{h} \in T_aM$ associe a .

PROPOSITION 4.1. *Si (U, φ) est une carte de M , alors $(TU, (\varphi, \varphi_*))$, où*

$$(\varphi, \varphi_*) : \mathbf{h} \in T_aM \mapsto (\varphi(a), \varphi_*\mathbf{h}) \in \varphi(U) \times \mathbb{R}^m,$$

est une carte de TM . Les cartes de TM de cette forme sont toutes compatibles. Elles définissent une structure de variété sur TM , de dimension $2 \dim M$, pour laquelle π_M est de classe C^∞ et est une submersion⁽⁸⁾.

DÉMONSTRATION. Il est clair que (φ, φ_*) est une bijection entre TU et $\varphi(U) \times \mathbb{R}^m$ qui est un ouvert de \mathbb{R}^{2m} . Par conséquent, $(TU, (\varphi, \varphi_*))$ est une carte de TM . Les cartes de cette forme sont compatibles car si (V, ψ) est une carte de M et si $U \cap V \neq \emptyset$ alors $TU \cap TV = T(U \cap V) \neq \emptyset$ et

$$(\psi, \psi_*) \circ (\varphi, \varphi_*)^{-1} = (\psi \circ \varphi^{-1}, (\psi \circ \varphi^{-1})_*).$$

6. Ceci appelle quelques remarques. D'abord, nous les noterons usuellement ∂_i sauf s'il est nécessaire de faire référence aux coordonnées locales considérées. Ensuite, \vec{e}_i désigne le i -ème vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^m . Enfin, pour éviter une quelconque ambiguïté, on précisera éventuellement le point en lequel ∂_i est tangent en notant plus précisément $\partial_i(a)$ celui-ci.

7. Le plus souvent, on oubliera d'écrire le "." et l'on notera $\partial_i x^j$ ce qu'on devrait noter $\partial_i.x^j$. Plus généralement, on se permettra à l'occasion d'écrire $\partial_i f$ à la place de $\partial_i.f$.

8. Une submersion est une application f pour laquelle f_{*a} est surjectif en tout a .

est de classe C^∞ de $(\varphi, \varphi_*)(TU \cap TV) = \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^m$ dans $(\psi, \psi_*)(TU \cap TV) = \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^m$.

L'expression locale

$$\varphi \circ \pi_M \circ (\varphi, \varphi_*)^{-1} : (u, h) \mapsto u.$$

de π_M dans les cartes (U, φ) et $(TU, (\varphi, \varphi_*))$ est une application linéaire surjective. Sa différentielle l'est donc aussi et π_M est une submersion.

La variété M est supposée à base dénombrable, ce qui revient à dire qu'elle possède un atlas dénombrable. Le fibré TM possède donc aussi un atlas dénombrable. Par conséquent, il est aussi à base dénombrable.

Vérifions, enfin, que TM est séparé. Soient $\mathbf{h}, \mathbf{k} \in TM$, $\mathbf{h} \neq \mathbf{k}$. Supposons que $x = \pi_M(\mathbf{h}) \neq y = \pi_M(\mathbf{k})$. La variété M étant séparée, il existe des domaines de cartes disjoints U et V de M contenant respectivement x et y . Ils donnent des ouverts disjoints TU et TV de TM contenant respectivement \mathbf{h} et \mathbf{k} . Si, au contraire, $x = y$, notons (U, φ) une carte de M dont le domaine contient x . Les expressions locales de \mathbf{h} et de \mathbf{k} sont distinctes. Elles appartiennent donc à des ouverts disjoints α et β de \mathbb{R}^m . Les ouverts $(\varphi, \varphi)_*^{-1}(\varphi(U), \alpha)$ et $(\varphi, \varphi)_*^{-1}(\varphi(U), \beta)$ de TM sont disjoints et contiennent l'un \mathbf{h} et l'autre \mathbf{k} . \square

La variété TM décrite dans la proposition ci-dessus est le *fibré tangent* de M ⁽⁹⁾.

PROPOSITION 4.2. *Si $f \in C^\infty(M, N)$ alors $f_* \in C^\infty(TM, TN)$.* ⁽¹⁰⁾

DÉMONSTRATION. En effet, si (U, φ) et (V, ψ) sont des cartes de M et de N telles que $f(U) \subset V$, alors $f_*(TU) \subset TV$ et l'expression locale de f_* dans les cartes correspondantes des fibrés TM et TN se lit

$$(u, h) \mapsto ((\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(u), (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_* u h).$$

\square

On vérifiera à titre d'exercice que l'application, où on considère S^1 plongé dans \mathbb{C} ,

$$(z, r) \in S^1 \times \mathbb{R} \mapsto rzi \in T_z S^1$$

est un difféomorphisme de $S^1 \times \mathbb{R}$ sur TS^1 ⁽¹¹⁾. De même, S^3 étant considéré comme plongé dans l'algèbre \mathbb{H} des quaternions,

$$(6) \quad (q, (r, s, t)) \in S^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto rqi + sqj + tqk \in T_q S^3$$

9. La signification du mot *fibré* ne sera pas donnée à ce stade. Il faut prendre l'expression "fibré tangent" comme un tout insécable.

10. Ainsi, la différentielle d'une application différentiable entre variétés est de nouveau une application différentiable entre variétés.

11. Si (U, φ) et (V, ψ) sont des cartes de variétés M et N , alors $(U \times V, (\varphi, \psi))$ en est une de $M \times N$. Avec ces cartes, $M \times N$ est muni d'une structure de variété, appelée *produit cartésien* des structures de M et de N . Sauf mention explicite du contraire, c'est toujours cette structure dont nous munirons les produits $M \times N$.

est un difféomorphisme de $S^3 \times \mathbb{R}^3$ sur $T_q S^3$. Dans les deux cas, le difféomorphisme respecte la structure vectorielle des espaces tangents. Par exemple, pour q fixé, (6) est une bijection linéaire en (r, s, t) de \mathbb{R}^3 sur $T_q S^3$.

En fait, il est assez rare qu'il existe un difféomorphisme $\tau : M \times \mathbb{R}^m \rightarrow TM$ tel que $\pi_M \circ \tau = p_1$ (¹²) et qui soit linéaire en le facteur de droite. Si c'est le cas, on dit que M est *parallélisable* car alors chaque espace tangent $T_a M$ est muni d'une base canonique associée à τ . Elle est formée des vecteurs $\tau_i(a) : \tau(\vec{e}_i)(a)$. On dit que les applications de classe C^∞ $a \in M \rightarrow \tau_i(a) \in T_a M$ forment une *parallélisation* (τ_1, \dots, τ_m) de M (¹³). Dans le cas de S^1 , elle contient un seul élément, donné par $\tau_1(z) = iz$. Dans celui de S^3 , il y en a trois : $(\tau_1, \tau_2, \tau_3)(q) = (qi, qj, qk)$. Tous les sous-groupes $G \subset GL(p, \mathbb{R})$ qui sont des variétés plongées sont parallélisables. Si $(e_i, 1 \leq m)$ est une base de leur algèbre de Lie $\mathcal{G} = T_1 G$, alors $(\tau_1, \dots, \tau_m)(A) = (Ae_1, \dots, Ae_m)$ en constitue en effet une parallélisation (¹⁴).

Le problème de déterminer si une variété est parallélisable est, en général, très difficile.

C'est également un exercice utile de vérifier que *si M est une variété plongée dans \mathbb{R}^m , alors TM est également une variété plongée, dans \mathbb{R}^{2m} .*

12. Pour tout produit cartésien, nous noterons p_k la projection sur le facteur de numéro k , pour autant qu'il n'en résulte aucune confusion.

13. La réciproque est vraie : une parallélisation donne un difféomorphisme

$$(x, (r_1, \dots, r_m)) \mapsto \sum_i r_i \tau_i(x)$$

entre \mathbb{R}^m et TM , linéaire sur les facteurs de droite.

14. Cet exemple généralise les deux précédents, S^1 et S^3 pouvant être considérés comme des sous-groupes de $GL(2, \mathbb{R})$ et $GL(4, \mathbb{R})$ respectivement, un élément x de ces sphères, z ou q , étant confondu avec la multiplication à gauche $x' \mapsto xx'$ par x .

Champs de vecteurs

Un *champ de vecteurs* sur une variété M est une application $X \in C^\infty(M, TM)$ vérifiant $\pi_M \circ X = id_M$. Cette dernière condition signifie que, pour tout $x \in M$, $X(x)$ est tangent *en* x à M .

A cause d'elle, l'expression locale de X dans des cartes (U, φ) et $(TU, (\varphi, \varphi_*))$ de M et de TM est de la forme

$$u \mapsto (u, (X^1(u), \dots, X^m(u))).$$

On dit alors que l'application de classe C^∞

$$u \in \varphi(U) \mapsto (X^1(u), \dots, X^m(u)) \in \mathbb{R}^m$$

constitue l'*expression locale* de X dans la carte (U, φ) de M . Si $\varphi(x) = u$ alors

$$X(x) = \sum_i X^i(u) \partial_i(x). \quad (1)$$

On écrit encore cette relation sous la forme $X = \sum_i X^i \partial_i$. Dans cette expression de X , il est parfois commode de considérer les X^i comme fonctions de $x \in U$ plutôt que de $u = \varphi(x)$. Quand ce sera le cas, nous ferons en sorte que le contexte l'indique clairement.

Pour rappel, $X^i = X.x^i$, où $x^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction qui associe à $x \in U$ sa coordonnée locale $\varphi^i(x)$ de numéro i .

1. Champs de vecteurs et dérivations

Nous allons identifier l'ensemble $Vect(M)$ des champs de vecteurs de M à l'espace des dérivations de l'algèbre $C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Dérivations d'une algèbre. Voici quelques rappels préalables relatifs à cette notion. Considérons une algèbre \mathcal{A} réelle, c'est-à-dire un espace vectoriel sur \mathbb{R} muni d'une application bilinéaire $(a, b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \mapsto ab \in \mathcal{A}$, la *multiplication* de \mathcal{A} .

Une *dérivation* de \mathcal{A} est une application linéaire $D : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ telle que

$$D(ab) = D(a)b + aD(b), \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

Il est clair que la somme $D + D' : a \mapsto D(a) + D'(a)$ de dérivations de \mathcal{A} est une dérivation de \mathcal{A} , de même que le produit $rD : a \mapsto rD(a)$ d'une dérivation par un scalaire r . L'ensemble $der \mathcal{A}$ des dérivations de

1. Dans la suite, selon les circonstances, nous noterons $X(x)$ ou X_x la valeur de X en $x \in M$.

\mathcal{A} est donc un espace vectoriel. De plus, un calcul immédiat montre que le commutateur $[D, D'] = D \circ D' - D' \circ D$ de dérivations est aussi une dériviation. Il est clair que $[\ , \] : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ est antisymétrique. On voit facilement qu'il vérifie l'identité de Jacobi

$$[D, [D', D'']] + [D', [D'', D]] + [D'', [D, D']] = 0, \forall D, D', D'' \in \text{der } \mathcal{A}.$$

Muni de cette application, $\text{der } \mathcal{A}$ est donc une algèbre de Lie.

EXEMPLE 1.1. Les dérivations de l'algèbre des matrices $gl(p, \mathbb{R})$.

Ce sont exactement les applications de la forme⁽²⁾

$$\text{ad}S : A \mapsto [S, A] = SA - AS,$$

où $S \in gl(p, \mathbb{R})$ est quelconque. L'application $S \mapsto \text{ad}S$ est une injection linéaire de $sl(p, \mathbb{R})$ dans l'espace des applications linéaires de $gl(p, \mathbb{R})$ dans lui-même. D'autre part, le commutateur de $\text{ad}S$ et $\text{ad}T$ est $\text{ad}[S, T]$. Au total, l'algèbre de Lie $\text{der}gl(p, \mathbb{R})$ est donc isomorphe à $sl(p, \mathbb{R})$.

THÉORÈME 1.2. L'application qui associe à $X \in \text{Vect}(M)$ la dériviation

$$D_X : f \mapsto X.f : x \mapsto X(x).f$$

de $C^\infty(M, \mathbb{R})$ est une bijection de $\text{Vect}(M)$ sur $\text{der } C^\infty(M, \mathbb{R})$.

DÉMONSTRATION. La démonstration n'est pas difficile mais un peu longue, à cause des petits détails qu'il faut vérifier. Voici les étapes : - vérifier que D_X est une dériviation, - vérifier que $X \rightarrow D_X$ est injectif, - vérifier qu'il est surjectif.

i) Pour chaque X , D_X est une dériviation. La fonction $X.f$ est de classe C^∞ car, dans toute carte (U, φ) de M , on a, d'après (4),

$$(X.f)(x) = \sum_i X^i(\varphi(x)) \partial_i(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)), \forall x \in U.$$

Ainsi, D_X est bien une application de $C^\infty(M, \mathbb{R})$ dans lui-même. Il est clair qu'elle est linéaire. De plus, pour tout $x \in M$,

$$\begin{aligned} D_X(fg)(x) &= X(x).(fg) \\ &= (X(x).f)g(x) + f(x)(X(x).g) \\ &= (D_X(f)g + fD_X(g))(x). \end{aligned}$$

C'est donc bien une dériviation.

ii) L'application $X \mapsto D_X$ est injective. Si $D_X = D_Y$, alors $X.f = Y.f$ pour tout f . Dès lors, étant donné $a \in M$, $X_a.f = Y_a.f$ pour tout f . Les a -dérivations X_a et Y_a sont ainsi égales pour tout $a \in M$. Donc $X = Y$.

2. Cela ne sera pas vérifié explicitement ici.

iii) L'application $X \mapsto D_X$ est surjective. Soit une dérivation D de $C^\infty(M, \mathbb{R})$. Pour chaque $x \in M$, on obtient un vecteur tangent $X(x) \in T_x M$ en posant

$$X(x).f = D(f)(x), \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R}).$$

En effet,

$$\begin{aligned} X(x).(fg) = D(fg)(x) &= ((Df)g)(x) + (f(Dg))(x) \\ &= D(f)(x)g(x) + f(x)D(g)(x) \\ &= (X(x).f)g(x) + f(x)(X(x).g). \end{aligned}$$

On obtient donc une application $X : M \rightarrow TM$ telle que $\pi_M \circ X = id_M$. Il faut encore vérifier qu'elle est de classe C^∞ pour conclure. Ceci peut se faire en prenant des fonctions f^i qui coïncident avec $x \mapsto x^i$ au voisinage d'un point arbitraire a de M : dans ce voisinage, la composante X^i de X vaut $D(f^i)$. elle est donc bien indéfiniment continûment dérivable. \square

Le théorème précédent nous donne l'essentiel des propriétés de $Vect(M)$: c'est une algèbre de Lie, dont le crochet de Lie est défini par le commutateur d'applications linéaires. Voici résumées les principales opérations ainsi définies sur $Vect(M)$.

— somme :

$$(X + Y)(x) = X(x) + Y(x)$$

— multiplication par un scalaire :

$$(rX)(x) = rX(x)$$

— crochet de Lie :

$$[X, Y](x).f = X(x).(Y.f) - Y(x).(X.f)$$

Les composantes de $[X, Y]$ dans une carte s'expriment au moyen de celles de X et de Y par la formule

$$(7) \quad [X, Y]^i = \sum_j (X^j \partial_j Y^i - Y^j \partial_j X^i).$$

Voici comment on peut par exemple vérifier cette égalité :

$$\begin{aligned} [X, Y]^i &= [X, Y].x^i \\ &= X.(Y.x^i) - Y.(X.x^i) \\ &= X.Y^i - Y.X^i \\ &= \sum_j (X^j \partial_j Y^i - Y^j \partial_j X^i), \end{aligned}$$

vu (4).

En utilisant par exemple l'expression locale de $[X, Y]$, on voit immédiatement que

PROPOSITION 1.3. *Quels que soient $X, Y \in \text{Vect}(M)$ et $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$,*

$$[X, fY] = f[X, Y] + (X.f)Y.$$

2. Courbes intégrales et flot

Une *courbe intégrale* d'un champ de vecteurs X de M est une courbe (I, γ) de M telle que

$$(8) \quad \dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t)), \forall t \in I.$$

Elle est *maximale* si, pour toute courbe intégrale (J, δ) de X , $I \subset J$ entraîne $I = J$ et $\gamma = \delta$ ⁽³⁾.

En coordonnées locales, la condition (8) se traduit par un système d'équations différentielles ordinaires autonomes. De fait, si $u(t)$ est l'expression locale $\varphi \circ \gamma(t)$ de γ dans une carte (U, φ) , alors

$$\frac{d}{dt}u^i = \dot{\gamma}.x^i = X(\gamma).x^i = X^i(u^1(t), \dots, u^m(t))$$

où, comme d'habitude, on note X^i les composantes de l'expression locale de X dans cette carte.

Les propriétés des courbes intégrales d'un champs de vecteurs se déduisent alors de celles des solutions d'un tel système. Nous n'entrons pas dans les détails. Signalons cependant les faits suivants qui en résultent facilement, avant d'étudier plus avant les courbes maximales. Notons aussi que le fait que la topologie de M est séparée est important pour les résultats énoncés ci-dessous.

- *Pour tout $a \in M$ et tout $t_0 \in \mathbb{R}$, il existe un ouvert ω de M contenant a et $\epsilon > 0$ pour lesquels si $x \in \omega$, alors X admet une unique courbe intégrale définie dans $]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$ et passant par x en t_0 .*
- *Si des courbes intégrales de X définies dans des intervalle I et J coïncident en un point de $I \cap J$ alors elles sont égales dans $I \cap J$.*

Ces deux propriétés permettent de vérifier que *pour tout x , X possède une unique courbe intégrale maximale passant par x en $t = 0$* . On la note $(\Omega_x, \varphi_t(x))$ et, pour t fixé, on désigne par Ω_t l'ensemble des $x \in M$ pour lesquels $t \in \Omega_x$. Nous acceptons la proposition suivante sans démonstration.

PROPOSITION 2.1. *L'ensemble*

$$\Omega = \bigcup_{x \in M} \Omega_x \times \{x\}$$

3. En fait, on peut vérifier que si $I = J$, alors γ et δ sont automatiquement égaux.

est un ouvert de $\mathbb{R} \times M$ dans lequel $(t, x) \mapsto \varphi_t(x)$ est de classe C^∞ .
Si $x \in \Omega_t$, alors

$$\varphi_t(x) \in \Omega_s \Leftrightarrow x \in \Omega_{s+t}$$

et, lorsqu'une de ces conditions est vérifiée,

$$\varphi_s(\varphi_t(x)) = \varphi_{s+t}(x).$$

En particulier, pour chaque t , Ω_t est un ouvert de M et φ_t est un difféomorphisme de Ω_t sur Ω_{-t} , d'inverse φ_{-t} .

L'application $(t, x) \in \Omega \mapsto \varphi_t(x) \in M$ s'appelle le *flot* de X . Quand son domaine de définition est $\mathbb{R} \times M$ tout entier, on dit de X que c'est un champ de vecteurs *complet*. On peut montrer que si M est compact, alors tous ses champs de vecteurs sont complets⁽⁴⁾.

3. Champs liés

Soient $f \in C^\infty(M, N)$, $X \in Vect(M)$ et $Y \in Vect(N)$. Les champs X et Y sont *f-liés* si

$$f_*X = Y \circ f.$$

PROPOSITION 3.1. Si X et Y ainsi que X' et Y' sont *f-liés*, alors $[X, X']$ et $[Y, Y']$ le sont aussi.

DÉMONSTRATION. En effet, si u est une fonction de classe C^∞ arbitraire sur N , alors, il vient successivement

$$\begin{aligned} ([Y, Y'] \circ f).u &= (Y \circ f).(Y'.u) - (Y' \circ f).(Y.u) \\ &= (f_*X).(Y'.u) - (f_*X').(Y.u) \\ &= X.((Y'.u) \circ f) - X'.((Y.u) \circ f) \\ &= X.((Y' \circ f).u) - X'.((Y \circ f).u) \\ &= X.((f_*X').u) - X'.((f_*X).u) \\ &= X.(X'.(u \circ f)) - X'.(X.(u \circ f)) \\ &= [X, X'].(u \circ f) \\ &= (f_*[X, X']).u. \end{aligned}$$

□

PROPOSITION 3.2. Soient des champs X et Y *f-liés*.

a) Si (I, γ) est une courbe intégrale de X alors $(I, f \circ \gamma)$ en est une de Y .

b) En particulier, si la courbe intégrale maximale $t \mapsto \varphi_t(x)$ passant par x en 0 de X est définie dans I , alors la courbe intégrale maximale $t \mapsto \psi_t(f(x))$ de Y passant par $f(x)$ en 0 est définie au moins dans I et $\psi_t(f(x)) = f(\varphi_t(x))$ pour tout $t \in I$.

⁴. Plus généralement, les champs de vecteurs à support compact sont toujours complets.

DÉMONSTRATION. Le point b) résulte immédiatement de a). Quant à celui-ci, on note que, pour tout $t \in I$,

$$(f \circ \gamma)'(t) = f_* \dot{\gamma}(t) = (Y \circ f)(\gamma(t)) = Y((f \circ \gamma)(t)).$$

□

4. Crochet de Lie et flot

Le crochet de Lie de champs de vecteurs peut être exprimé à l'aide de leurs flots.

PROPOSITION 4.1. *Soient $X, Y \in Vect(M)$ et $(t, x) \in \Omega \mapsto \varphi_t(x) \in M$ le flot de X . Pour tout $a \in M$,*

$$\frac{d}{dt} \varphi_{-t*} Y_{\varphi_t(a)} = \varphi_{-t*} [X, Y]_{\varphi_t(a)}, \forall t \in \Omega_a.$$

DÉMONSTRATION. i) Vérifions d'abord cette égalité en $t = 0$, en coordonnées locales. Pour t assez proche de 0 et x assez proche de a , les points $\varphi_{\pm t}(x)$ sont dans le domaine d'une carte arbitrairement fixée de M dont le domaine contient a . Notons $\Phi(t, u)$ l'expression locale de $\varphi_t(x)$. Celle de $\varphi_{-t*} Y_{\varphi_t(x)}$ est alors

$$\sum_{ij} \frac{\partial \Phi^i}{\partial u^j}(-t, \Phi(t, u)) Y^j(\Phi(t, u)) \vec{e}_i,$$

où \vec{e}_i est le i -ième vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^m . La dérivée par rapport à t de cette expression comporte trois termes, correspondant aux trois occurrences de t . Pour les calculer, en $t = 0$, on utilisera l'égalité

$$\frac{d}{dt} \Phi(t, u) = X(\Phi(t, u))$$

sans oublier que $\Phi(0, u) = u$, ce qui entraîne que

$$\frac{\partial \Phi^i}{\partial u^j}(0, u) = \delta_j^i.$$

Le premier terme vaut ainsi

$$- \sum_{ij} \frac{\partial X^i}{\partial u^j} Y^j(u) \vec{e}_i.$$

Le second vaut

$$\sum_{ij} \left(\frac{d}{dt} \delta_j^i \right) Y^j(u) \vec{e}_i = 0.$$

Pour le troisième, on obtient

$$\sum_{ijk} \delta_j^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^k} X^k(u) \vec{e}_i = \sum_{ij} \frac{\partial Y^i}{\partial u^j} X^j(u) \vec{e}_i.$$

La somme de ces trois termes est bien l'expression locale de $[X, Y](x)$.
 ii) Passons maintenant au cas général. Compte tenu de la proposition 2.1 et de i), il vient ⁽⁵⁾

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varphi_{-t*}Y_{\varphi_t(a)}|_{t=s} &= \frac{d}{d\lambda}\varphi_{(-s-\lambda)*}Y_{\varphi_{s+\lambda}(a)}|_{\lambda=0} \\ &= \frac{d}{d\lambda}\varphi_{-s*}\varphi_{-\lambda*}Y_{\varphi_\lambda(\varphi_s(a))}|_{\lambda=0} \\ &= \varphi_{-s*}\frac{d}{d\lambda}\varphi_{-\lambda*}Y_{\varphi_\lambda(\varphi_s(a))}|_{\lambda=0} \\ &= \varphi_{-s*}Y(\varphi_s(a)). \end{aligned}$$

□

LEMME 4.2. Soient $X, Y \in \text{Vect}(M)$ et $a \in M$. Notons φ le flot de X et ψ celui de Y . Il existe un ouvert ω de M contenant a et $\epsilon > 0$ tels que, pour tout $x \in \omega$, les fonctions $(t, s) \mapsto \varphi_t \circ \psi_s(x)$ et $(t, s) \mapsto \psi_s \circ \varphi_t(x)$ soient définies dans $] - \epsilon, \epsilon[\times] - \epsilon, \epsilon[$.

DÉMONSTRATION. Notons Ω le domaine de définition de φ et Ω' celui de ψ . La fonction $\psi' : (t, s, x) \in \mathbb{R} \times \Omega' \mapsto (s, t, \psi_s(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M$ est continue et applique $(0, 0, a)$ sur lui-même. L'intersection $(\mathbb{R} \times \Omega') \cap \psi'^{-1}(\mathbb{R} \times \Omega)$ est donc un ouvert non vide, contenant $(0, 0, a)$. Il existe donc un ouvert ω de M contenant a et $\epsilon > 0$ tels que

$$(0, 0, a) \in] - \epsilon, \epsilon[\times] - \epsilon, \epsilon[\times \omega \subset (\mathbb{R} \times \Omega') \cap \psi'^{-1}(\mathbb{R} \times \Omega).$$

Autrement dit, l'ensemble $] - \epsilon, \epsilon[\times] - \epsilon, \epsilon[\times \omega$ est donc contenu dans le domaine de définition de $(t, s, x) \mapsto \varphi_t \circ \psi_s(x)$. Quitte à restreindre ω et à diminuer ϵ , on peut aussi supposer qu'il l'est dans celui de $(t, s, x) \mapsto \psi_s \circ \varphi_t(x)$. □

PROPOSITION 4.3. Soient $X, Y \in \text{Vect}(M)$. Notons φ le flot de X et ψ celui de Y . Si $[X, Y] = 0$, alors pour tout $a \in M$, il existe un ouvert ω de M contenant a et $\epsilon > 0$ tels que, pour tout $x \in \omega$,

$$(9) \quad \varphi_t \circ \psi_s(x) = \psi_s \circ \varphi_t(x)$$

quels que soient t et s dans $] - \epsilon, \epsilon[$ et réciproquement.

DÉMONSTRATION. Nous choisissons ω et ϵ comme dans le lemme ci-dessus. Supposons que $[X, Y] = 0$. Pour $x \in \omega$ et t dans $] - \epsilon, \epsilon[$, la dérivée

$$\frac{d}{dt}\varphi_{-t*}Y_{\varphi_t(x)} = \varphi_{-t*}[X, Y]_{\varphi_t(x)}$$

est nulle. Ainsi, $\varphi_{-t*}Y_{\varphi_t(x)} = Y_x$ et, dans ω , le champ Y est φ_t -lié à lui-même. Vu la proposition 3.2, l'égalité (9) est alors vraie pour tout s dans $] - \epsilon, \epsilon[$. Inversement, supposons que les flots de X et Y commutent comme indiqué dans l'énoncé. En dérivant l'égalité (9) par rapport à s , on obtient

$$\varphi_{-t*}Y_{\varphi_t(x)} = Y_x.$$

5. Les applications $\frac{d}{d\lambda}$ et φ_{-s*} commutent car celle-ci est une application entre espaces vectoriels de dimension finie. La vérification est aisée en passant à des bases.

En prenant la dérivée par rapport à t , on constate ensuite que $[X, Y](x) = 0$. Le point a étant arbitraire dans M , on en déduit que le crochet de Lie de X et de Y est nul. \square

Un théorème de “redressement”. Le fait de pouvoir disposer librement des coordonnées locales que l’on utilise incite à choisir des cartes dans lesquelles le problème étudié est “le plus simple possible”. Dans cette optique, on est donc amené à chercher dans quelle mesure des objets géométriques ont des expressions locales canoniques. Voici un exemple de cette sorte de résultats.

PROPOSITION 4.4. *Soient $a \in M$ et des champs de vecteurs X_1, \dots, X_p dont les commutateurs $[X_i, X_j]$ soient tous nuls. Si les vecteurs tangents $X_i(a)$ sont linéairement indépendants, alors il existe une carte (U, φ) de M dont le domaine contient a et dans laquelle*

$$X_i|_U = \partial_i, \quad \forall i \leq p.$$

DÉMONSTRATION. Désignons par φ^i le flot de X_i . En vertu d’une généralisation facile du lemme 4.2, il existe un ouvert ω de M contenant a et un nombre positif ϵ tels que

$$\varphi_{t^1}^1 \circ \dots \circ \varphi_{t^p}^p(x)$$

existe pour tous $t^1, \dots, t^p \in]-\epsilon, \epsilon[$ et tout $x \in \omega$. Choisissons une carte (U_0, φ_0) de M dont le domaine contient a telle que $\varphi_0(a) = 0$ et

$$\varphi_{0*} X_i(a) = \vec{e}_i, \quad \forall i \leq p.$$

On obtient une telle carte à partir d’une carte quelconque composée avec une affinité qui translate l’image de a en 0 et qui transforme les expressions locales des $X_i(a)$ en les \vec{e}_i . Posons

$$\Phi(u^1, \dots, u^m) = \varphi_{u^1}^1 \circ \dots \circ \varphi_{u^p}^p(\varphi_0^{-1}(0, \dots, 0, u^{p+1}, \dots, u^m)).$$

L’application Φ est de classe C^∞ dans un voisinage ouvert de 0 dans \mathbb{R}^m . Nous allons vérifier que Φ_{*0} est non singulier et que

$$\Phi_{*u} \vec{e}_i = X_i(\Phi(u)), \quad \forall i \leq p.$$

En vertu du théorème de la fonction inverse, la première propriété montre que $\varphi_0 \circ \Phi$ est un changement de variables au voisinage de 0 et que, par conséquent, en rétrécissant U_0 à un ouvert contenant a assez petit, on obtient une carte (U, Φ^{-1}) de M . Elle nécessite seulement que les champs considérés soient indépendants en a . La seconde propriété montre que cette carte répond à la question. Elle utilise le fait que les champs X_i commutent.

Vérifions ces propriétés. Par définition,

$$\Phi_{*u} \vec{e}_i = \frac{d}{dt} \Phi(u + t \vec{e}_i)|_{t=0}$$

Si $i \leq p$ alors

$$\begin{aligned}\Phi_{*u} \vec{e}_i &= \frac{d}{dt} \varphi_{u^1}^1 \circ \dots \circ \varphi_{u^{i+t}}^i \circ \dots \circ \varphi_{u^p}^p \circ \varphi_0^{-1}(0, \dots, 0, u^{p+1}, \dots, u^m) \\ &= \frac{d}{dt} \varphi_{u^1}^1 \circ \dots \circ \varphi_t^i \circ \varphi_{u^i}^i \circ \dots \circ \varphi_{u^p}^p \circ \varphi_0^{-1}(0, \dots, 0, u^{p+1}, \dots, u^m) \\ &= \frac{d}{dt} \varphi_t^i \circ \varphi_{u^1}^1 \circ \dots \circ \varphi_{u^p}^p \circ \varphi_0^{-1}(0, \dots, 0, u^{p+1}, \dots, u^m) \\ &= X_i(\Phi(u))\end{aligned}$$

car les applications φ^j commutent puisque les crochets $[X_j, X_k]$ sont nuls deux à deux. En particulier, $\Phi_{*0} \vec{e}_i = \partial_i(a)$.

Si $i > p$, alors

$$\Phi_{*0} \vec{e}_i = \frac{d}{dt} \varphi_0^{-1}(t \vec{e}_i)|_{t=0} = \partial_i(a)$$

car φ_0^i est l'identité dans ω . Donc Φ_{*0} transforme la base des \vec{e}_i de \mathbb{R}^m en la base des $\partial_i(a)$ de $T_a M$. Il est donc non singulier. \square

EXEMPLE 4.5. *Les coordonnées polaires.*

Considérons, dans \mathbb{R}^2 , les champs

$$X = x\partial_x + y\partial_y$$

et

$$Y = y\partial_x - x\partial_y.$$

Une courbe intégrale $(x(s), y(s))$ de Y est solution des équations différentielles

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

On a donc

$$\ddot{x} + x = 0$$

si bien que la courbe intégrale maximale de Y passant par (a, b) en $s = 0$ est donnée par $x = a \cos s + b \sin s$ et $y = b \cos s - a \sin s$, ou encore

$$\psi_s((a, b)) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Semblablement, on vérifie que le flot de X est

$$\varphi_t((a, b)) = e^t(a, b).$$

Il est clair que les applications φ et ψ commutent. On peut vérifier directement que $[X, Y] = 0$ avec la formule (7). La composée de ces flots en $(a, b) = (1, 0)$ est l'application

$$(t, s) \mapsto (e^t \cos s, e^t \sin s).$$

En posant $r = e^t$, on retrouve les coordonnées polaires de \mathbb{R}^2 . On notera que X et Y sont linéairement indépendants en tout point $(a, b) \neq (0, 0)$.

4.1. Compléments.

Champs de vecteurs sur S^1 . Soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ contenant S^1 . Pour $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, on note X^f le champ de vecteurs de S^1 donné par

$$X^f : (x, y) \mapsto f(x, y)(-y, x).$$

Pour $f, g \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ calculer $[X^f, X^g]$ sous la forme X^h , $h \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$.

Champs de vecteurs sur S^1 bis. On conserve les notations du paragraphe précédent. Montrer que pour tout $X \in Vect(S^1)$, il existe un ouvert Ω contenant S^1 et une fonction $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ tels que $X = X^f$.

Champs de vecteurs sur $SO(3)$. Soit une base E, F, H de l'algèbre de Lie $so(3)$.

a) Montrer que pour tout $X \in Vect(SO(3))$, il existe des fonctions α, β et γ de classe C^∞ sur un voisinage ouvert de $SO(3)$ dans $gl(3, \mathbb{R})$ telles que

$$X_A = X^{\alpha, \beta, \gamma} := \alpha_A E_A + \beta_A F_A + \gamma_A H_A, \forall A \in SO(3).$$

b) Calculer le crochet de Lie $[X^{\alpha, \beta, \gamma}, X^{\alpha', \beta', \gamma'}]$ sous la forme $X^{\alpha'', \beta'', \gamma''}$

c) En identifiant $\mathbb{R}^3 P$ à $SO(3)$ (3.1), pour $H \in gl(4, \mathbb{R})$ déterminer des fonctions α, β, γ telles que $H^g = X^{\alpha, \beta, \gamma}$.

L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie

1. Groupes de Lie

Un *groupe de Lie* est un ensemble G muni d'une structure de groupe et d'une structure de variété différentielle compatibles, ce qui signifie que l'application

$$(x, y) \in G \times G \mapsto xy^{-1} \in G$$

est de classe C^∞ ou, de façon équivalente, que les applications

$$(x, y) \in G \times G \mapsto x \in G \quad \& \quad x \in G \mapsto x^{-1} \in G$$

sont de classe C^∞ .

Voici quelques exemples de groupes de Lie.

— *Le groupe linéaire général.* Il s'agit de l'ensemble

$$GL(p, \mathbf{R}) = \{A \in \mathbf{R}_p^p \mid \det A \neq 0\}$$

C'est un ouvert de $\mathbf{R}_p^p \equiv \mathbf{R}^{p^2}$. C'est donc une variété différentielle, définie par un atlas dont l'unique carte est $(GL(p, \mathbf{R}), \text{id})$.

C'est également un groupe pour le produit matriciel usuel et les deux structures sont compatibles. En effet, les éléments du produit AB sont des polynômes en ceux des facteurs A, B et les éléments de A^{-1} sont des fractions rationnelles dont le dénominateur, $\det A$, ne s'annule pas. La multiplication et le passage à l'inverse de $GL(p, \mathbf{R})$ sont donc de classe C^∞ pour la structure de variété dont nous venons de le doter.

— *Le groupe de l'orientation.* Il s'agit de

$$GL_+(p, \mathbf{R}) = \{A \in \mathbf{R}_p^p \mid \det A > 0\}$$

C'est un sous-groupe ouvert de $GL(p, \mathbf{R})$ (la fonction $\det : \mathbf{R}_p^p \rightarrow \mathbf{R} \setminus \{0\}$ est un homomorphisme continu); c'est donc également un groupe de Lie. Notons que c'est la composante connexe du neutre I_p de $GL(p, \mathbf{R})$, ce que nous ne vérifierons pas en détail ici. Il est connu comme étant le groupe des matrices de passages entre les bases d'une même orientation d'un espace vectoriel réel de dimension p . D'où son nom.

D'après un théorème général d'Elie Cartan que nous n'établirons pas, les sous-groupes fermés de $GL(p, \mathbf{R})$ sont des groupes de Lie. Ils sont même *plongés* dans $GL(p, \mathbf{R})$, ce qui signifie que leur topologie est

la topologie induite. Ceci donne des exemples (importants) de groupes de Lie dont nous allons lister certains ci-dessous.

— *Le groupe linéaire spécial.* On appelle ainsi le noyau de \det , i.e. le sous-groupe (normal)

$$SL(p, \mathbf{R}) = \{A \in GL(p, \mathbf{R}) \mid \det A = 1\}$$

de $GL(p, \mathbf{R})$ dont il est un fermé.

— *Le groupe orthogonal.* C'est le sous-groupe

$$O(p) = \{A \in \mathbf{R}_p^p \mid \tilde{A}A = I_p\}$$

C'est également un fermé de $GL(p, \mathbf{R})$ puisque l'application $A \mapsto AA - I_p$ est continue. Il est constitué des matrices de passages entre les bases orthonormées d'un espace vectoriel euclidien.

— *Le groupe orthogonal spécial.* Le déterminant d'une matrice orthogonale vaut 1 ou -1 . Par conséquent

$$SO(p) := O(p) \cap SL(p, \mathbf{R}) = O(p) \cap GL_+(p, \mathbf{R})$$

est un sous-groupe fermé de $GL(p, \mathbf{R})$ mais aussi un ouvert de $O(p)$. C'est donc un groupe de Lie, appelé *groupe orthogonal spécial*. C'est l'ensemble des matrices de passage entre les bases orthonormées positives d'un espace vectoriel euclidien orienté.

2. Champs de vecteurs invariants à gauche

Soit un groupe de Lie G dont nous noterons e l'élément neutre.

Pour chaque $x \in G$, on désigne par L_x la multiplication à gauche par x , c'est-à-dire l'application

$$y \in G \mapsto xy \in G$$

C'est une application de classe C^∞ , comme la multiplication de G .

Le fait que la multiplication de G soit associative se traduit par

$$(10) \quad \forall x, y \in G, \quad L_x \circ L_y = L_{xy}$$

En effet, pour tous $x, y, z \in G$,

$$(L_x \circ L_y)(z) = L_x(L_y(z)) \quad \& \quad L_{xy}(z) = (xy)z$$

Il résulte de (10) que L_x est un difféomorphisme de G et que sa réciproque est $L_{x^{-1}}$. En effet, L_e est, manifestement, l'identité de G dans lui-même.

En passant aux applications linéaires tangentes dans (10), nous obtenons

$$(11) \quad \forall x, y \in G, \quad L_{x*} \circ L_{y*} = L_{(xy)*}$$

Autrement dit, l'application $x \mapsto L_{x*}$ est une action de G sur son fibré tangent. Elle est évidemment de classe C^∞ . Il est commode de poser

$$\forall x \in G, \forall \mathbf{h} \in TG, \quad L_{x*}\mathbf{h} = x\mathbf{h}$$

Avec cette notation, la relation (11) s'écrit encore

$$\forall x, y \in G, \forall \mathbf{h} \in TG, \quad x(y\mathbf{h}) = (xy)\mathbf{h}$$

Champs invariants à gauche. Un champ de vecteurs $X \in Vect(G)$ est *invariant à gauche* lorsque

$$\forall x \in G, \quad L_{x*}X = X \circ L_x$$

Autrement dit, si, pour chaque $x \in G$, il est L_x -lié à lui-même. Avec nos conventions d'écriture, ceci s'écrit aussi

$$\forall x, y \in G, \quad xX_y = X_{xy}$$

Nous noterons $\mathcal{L}(G)$ l'ensemble des champs de vecteurs invariants à gauche de G . C'est un sous-espace vectoriel de $Vect(G)$. Il est clair, en effet, qu'une combinaison linéaire de champs de vecteurs invariants à gauche est invariante à gauche. *C'est également une sous-algèbre de Lie de $Vect(G)$.* En effet, si X, Y sont des champs invariants à gauche, alors pour tout $x \in G$, chacun est L_x -lié à lui-même de sorte que, vu la propriété 3.1, page 30, $[X, Y]$ est aussi L_x -lié à lui-même.

PROPOSITION 2.1. *L'application*

$$X \in \mathcal{L}(G) \mapsto X_e \in T_eG$$

est une bijection linéaire.

DÉMONSTRATION. L'application proposée est évidemment linéaire.

Elle est injective. De fait si $X \in \mathcal{L}(G)$ s'annule en e , alors il s'annule partout puisque $X_x = xX_e$ en tout point x de G .

Elle est également surjective. Pour tout $\mathbf{u} \in T_eG$, l'application

$$\mathbf{u}^* : x \mapsto x\mathbf{u}$$

est en effet un champ de vecteurs invariant à gauche dont la valeur en e est \mathbf{u} . \square

Il résulte de la propriété que nous venons d'établir que l'application $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ définie par

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = [\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*]_e$$

est un crochet de Lie sur l'espace tangent T_eG pour lequel $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u}^*$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie de $(T_eG, [-, -])$ sur $\mathcal{L}(G)$.

On appelle $(T_eG, [-, -])$ *l'algèbre de Lie du groupe G* . Nous la désignerons par \mathcal{G} .

L'algèbre de Lie des groupes de matrices. L'algèbre de Lie du groupe $GL(p, \mathbf{R})$ est notée $gl(p, \mathbf{R})$. Comme espace vectoriel, c'est l'ensemble de toutes les matrices carrées, réelles et de dimension p . Comme on le voit facilement, le crochet de Lie de matrices $A, B \in gl(p, \mathbf{R})$ est tout simplement leur commutateur : $[A, B] = AB - BA$. Comme $G_+(p, \mathbf{R})$ est un ouvert de $GL(p, \mathbf{R})$, son algèbre de Lie est aussi $gl(p, \mathbf{R})$.

Le crochet de Lie des algèbres de Lie des sous-groupes de $GL(p, \mathbf{R})$ introduits plus haut est également le commutateur de matrices. On va expliquer cela sur l'exemple de $SL(p, \mathbf{R})$. Le raisonnement est le même dans les autres cas. On note $i : SL(p, \mathbf{R}) \rightarrow GL(p, \mathbf{R})$ l'inclusion $A \mapsto A$. Une matrice U tangente à $SL(p, \mathbf{R})$ en le neutre est aussi tangente à $GL(p, \mathbf{R})$ en le neutre. Elle donne lieu à deux champs invariants à gauche : un sur $SL(p, \mathbf{R})$ que nous noterons provisoirement U_{sl}^* et un sur $GL(p, \mathbf{R})$, disons U^* . Clairement, les deux champs sont i -liés. Par conséquent, si V est aussi tangent à $SL(p, \mathbf{R})$ en le neutre, alors les crochets de Lie $[U_{sl}^*, V_{sl}^*]$ et $[U^*, V^*]$ sont aussi i -liés, ce qui permet de conclure.

Cela noté, on obtient facilement les choses suivantes. L'algèbre de Lie de $SL(p, \mathbf{R})$, que l'on note $sl(p, \mathbf{R})$, est l'espace des matrices réelles de dimension p dont la trace est nulle muni du commutateur de matrices. Les groupes $O(p)$ et $SO(p)$ ont la même algèbre de Lie. Elle est notée $so(p)$. C'est l'espace des matrices réelles de dimension p antisymétriques, muni également du commutateur de matrices.

3. Une équation différentielle

Soient un groupe de Lie G . Dans cette section, nous allons étudier l'équation différentielle

$$(12) \quad \gamma' = \gamma \mathbf{h}$$

où \mathbf{h} est une courbe de l'algèbre de Lie \mathcal{G} de G , définie et de classe C^∞ dans un intervalle ouvert $I \subset \mathbf{R}$.

Pour que les choses soient bien claires, une solution de (12) est une courbe $c : J \rightarrow G$ de classe C^∞ de G telle que

$$\forall t \in J, \quad c'(t) = L_{c(t)*} \mathbf{h}(t)$$

Voici une première observation, bien utile.

PROPOSITION 3.1. *Si (J, c) est une solution de (12) et si $x \in G$, alors $xc : t \in J \mapsto xc(t) \in G$ est aussi une solution de cette équation.*

DÉMONSTRATION. Soient une solution (J, c) de l'équation et $x \in G$. Alors, pour tout $t \in J$, en appliquant (11), il vient

$$(xc)'(t) = L_{x*} c'(t) = L_{x*} (L_{c(t)*} \mathbf{h}(t)) = L_{(xc(t))*} \mathbf{h}$$

□

Cela étant,

THÉORÈME 3.2. *Pour tout $s \in I$ et tout $a \in G$, l'équation différentielle (12) admet une solution unique $\gamma : I \rightarrow G$ telle que $\gamma(s) = a$.*

DÉMONSTRATION. Nous découperons celle-ci en plusieurs étapes.

a) *Pour tout $t_0 \in I$ et tout $x_0 \in G$, il existe un voisinage ouvert ω de x_0 et $\varepsilon > 0$ tels que, pour tout $x \in \omega$, l'équation (12) admette une seule solution dans $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ passant par x en $t = t_0$.*

Exprimée en coordonnées locales, l'équation prend la forme d'un système d'équation différentielles ordinaires dont les second membres sont de classe C^∞ . La propriété résulte alors immédiatement d'un théorème classique d'analyse.

b) *Si des solutions (J_i, c_i) , $i = 1, 2$, de l'équation coïncident en $t_0 \in J_1 \cap J_2$, alors elles coïncident sur $J_1 \cap J_2$.*

En effet, l'ensemble

$$e = \{t \in J_1 \cap J_2 \mid c_1(t) = c_2(t)\}$$

est ouvert, fermé et non vide. Il est ouvert vu a), fermé par continuité des applications c_i (n'oublions pas que la topologie de G est séparée) et non vide par hypothèse : $t_0 \in e$. La connexité de l'intervalle $J_1 \cap J_2$ implique alors qu'il coïncide avec e .

c) *Pour tout $s \in I$ et tout $a \in G$, l'équation admet une solution seule maximale passant par a en $t = s$.*

Notons en effet \mathcal{S} l'ensemble des solutions (J, c) de l'équation vérifiant $c(s) = a$. Il n'est pas vide, vu a). Posons alors

$$\mathcal{J} = \bigcup_{(J,c) \in \mathcal{S}} J$$

Pour tout $t \in \mathcal{J}$, il existe une solution $(J, c) \in \mathcal{S}$ pour laquelle $t \in J$. On pose alors $\gamma(t) = c(t)$, valeur qui ne dépend pas de la solution en question, vu b). Clairement l'application $\gamma : \mathcal{J} \rightarrow G$ ainsi définie est une solution de l'équation. Elle passe par a en $t = s$ et, clairement, elle est maximale. L'unicité est évidente.

d) *Les solutions maximales de l'équation sont définies sur I .*

Soit une solution maximale (J, c) de l'équation. On va montrer par l'absurde que $J = I$. Si $J \neq I$ alors $\inf J \in I$ ou $\sup J \in I$. Supposons, par exemple, que $q = \sup J$ appartienne à I (le cas $\inf J \in I$ se traite de façon similaire). Vu a), l'équation admet une solution $(]q - \varepsilon, q + \varepsilon[, u)$ qui passe par e en $t = q$. D'après la propriété 3.1, l'application

$$d : t \in]q - \varepsilon, q + \varepsilon[\mapsto c\left(q - \frac{\varepsilon}{2}\right)u\left(q - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-1}u(t) \in G$$

est une solution de l'équation. En vertu de b), comme elle passe par $c(q - \frac{\varepsilon}{2})$ en $t = q - \frac{\varepsilon}{2}$, elle coïncide avec c dans $]q - \varepsilon, q[$. Mais alors

$$t \mapsto \begin{cases} c(t) & \text{si } t \in J \\ d(t) & \text{si } t \in]q - \varepsilon, q + \varepsilon[\end{cases}$$

est une solution de l'équation définie dans un intervalle strictement plus grand que J et qui coïncide avec c dans J . \square

4. Le flot d'un champ de vecteurs invariant à gauche

Notons encore G un groupe de Lie et, pour $\mathbf{u} \in \mathcal{G}$, désignons par $\varphi^{\mathbf{u}}$ le flot du champ invariant à gauche \mathbf{u}^* .

La courbe $t \mapsto \varphi_t^{\mathbf{u}}(x)$ est la solution maximale de l'équation $\gamma' = \gamma\mathbf{u}$ telle que $\gamma(0) = x$. Il s'agit de l'équation (12) dans le cas particulier où \mathbf{h} est l'application constante $t \in \mathbf{R} \mapsto \mathbf{u} \in \mathcal{G}$.

En vertu du théorème précédent, le champ de vecteurs \mathbf{u}^* est donc complet, i.e. le domaine de définition de $\varphi^{\mathbf{u}}$ est $\mathbf{R} \times G$. De plus, à cause de la propriété 3.1, on a $x\varphi_t^{\mathbf{u}}(y) = \varphi_t^{\mathbf{u}}(xy)$ pour tous $x, y \in G$.

Par ailleurs,

$$\forall s, t \in \mathbf{R}, \forall x \in G, \quad \varphi_t^{s\mathbf{u}}(x) = \varphi_{st}^{\mathbf{u}}(x)$$

Il s'avère en effet que les deux courbes $t \mapsto \varphi_t^{s\mathbf{u}}(x)$ et $t \mapsto \varphi_{st}^{\mathbf{u}}(x)$ sont toutes les deux solutions de l'équation différentielle $\gamma' = \gamma(s\mathbf{u})$. Comme elles passent toutes les deux par x en $t = 0$, elles sont donc égales.

En combinant les observations que nous venons de faire, nous voyons que

$$\varphi_t^{\mathbf{u}}(x) = x\varphi_1^{t\mathbf{u}}(e)$$

Ceci montre que les flots des champs de vecteurs invariants à gauche de G sont complètement déterminés par l'application

$$\exp : \mathbf{u} \in \mathcal{G} \mapsto \varphi_1^{\mathbf{u}}(e) \in G$$

avec laquelle on peut de fait écrire

$$\varphi_t^{\mathbf{u}}(x) = x \exp(t\mathbf{u})$$

L'application \exp est l'*application exponentielle* du groupe de Lie G . En voici quelques propriétés.

- PROPOSITION 4.1. a) $\exp \in C^\infty(\mathcal{G}, G)$.
 b) $\forall s, t \in \mathbf{R}, \quad \exp((s + t)\mathbf{u}) = \exp(s\mathbf{u})\exp(t\mathbf{u})$.
 c) $\exp_{*0} = \text{id}_{\mathcal{G}}$.

DÉMONSTRATION. Le point a) résulte des propriétés de régularité des solutions des systèmes d'équations différentielles ordinaires paramétriques. Nous ne détaillerons pas la vérification.

Pour b), on note que

$$\exp((s + t)\mathbf{u}) = \varphi_{s+t}^{\mathbf{u}}(e) = \varphi_t^{\mathbf{u}}(\varphi_s^{\mathbf{u}}(e)) = \varphi_s^{\mathbf{u}}(e)\varphi_t^{\mathbf{u}}(e) = \exp(s\mathbf{u})\exp(t\mathbf{u})$$

Pour c), le plan tangent à \mathcal{G} en $\mathbf{0}$ étant identifié à \mathcal{G} , il vient, pour tout $\mathbf{h} \in \mathcal{G}$,

$$\exp_{*\mathbf{0}} \mathbf{h} = \frac{d}{dt} \exp(t\mathbf{h})_{t=0} = \mathbf{h}_e^* = \mathbf{h}$$

□

Il résulte de c) que \exp est un difféomorphisme d'un voisinage ouvert ω de $\mathbf{0}$ dans \mathcal{G} sur un voisinage ouvert U de e dans G . En prenant une base $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ de \mathcal{G} et en composant $\exp^{-1} : U \rightarrow \omega$ avec le passage aux composantes $\mathcal{G} \rightarrow \mathbf{R}^n$ selon cette base, on obtient une carte privilégiée de G , dite *carte exponentielle*. En composant cette carte avec les multiplications à gauche, on obtient alors un atlas de G .

Dans le cas de $GL(p, \mathbf{R})$, l'application \exp est l'exponentielle classique des matrices

$$\exp H = e^H = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} H^k$$

5. Homomorphismes de groupes de Lie

Soient des groupes de Lie G et G' . Nous noterons e leurs éléments neutres, L leurs multiplications à gauche et \exp leurs applications exponentielles, ce qui ne devrait pas prêter à confusion.

PROPOSITION 5.1. *Soit un homomorphisme de groupes $f : G \rightarrow G'$, de classe C^∞ .*

- a) *Pour tous $\mathbf{u} \in \mathcal{G}$, les champs \mathbf{u}^* et $(f_{*e}\mathbf{u})^*$ sont f -liés.*
- b) *$f \circ \exp = \exp \circ f_{*e}$*
- c) *L'application $f_{*e} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie.*

DÉMONSTRATION. Établissons d'abord a). Le fait que f soit un homomorphisme équivaut à

$$\forall x \in G, \quad f \circ L_x = L_{f(x)} \circ f$$

En dérivant cette relation, il vient

$$\forall x \in G, \forall \mathbf{h} \in T(G), \quad f_*(x\mathbf{h}) = f(x)(f_*\mathbf{h})$$

de quoi a) résulte aussitôt.

La propriété b) découle de a), de la propriété 3.2, page 30, et du fait que le flot du champ invariant gauche \mathbf{u} est $(t, x) \mapsto x \exp(t\mathbf{u})$.

Le point c) résulte également de a). Vu a) en effet, et vu la propriété 3.1, page 30, pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{G}$, les champs $[\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*]$ et $[(f_{*e}\mathbf{u})^*, (f_{*e}\mathbf{v})^*]$ sont f -liés. Dès lors

$$f_{*e}[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = f_{*e}[\mathbf{u}, \mathbf{v}]_e^* = [(f_{*e}\mathbf{u})^*, (f_{*e}\mathbf{v})^*]_{f(e)} = [f_{*e}\mathbf{u}, f_{*e}\mathbf{v}]$$

□

Voici une illustration de la propriété b). Prenons pour f l'homomorphisme $\det : GL(p, \mathbf{R}) \rightarrow GL(1, \mathbf{R}) \equiv \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Vu b), pour toute matrice $H \in gl(p, \mathbf{R})$, on a

$$\det(e^H) = e^{\det_{*I_p}(H)} = e^{\text{tr } H}$$

Il est en effet aisé de vérifier que $\det_{*A} H = \text{tr}(\text{Com}(A)H)$ où $\text{Com}(A)$ est la *comatrice* de A , i.e. la matrice de ses cofacteurs.

PROPOSITION 5.2. *Soient des homomorphismes de groupes f, g de G dans G' , de classe C^∞ . Si G est connexe et si $f_{*e} = g_{*e}$, alors $f = g$.*

DÉMONSTRATION. Supposons donc que G soit connexe et que $f_{*e} = g_{*e}$. Posons

$$E = \{x \in G \mid f(x) = g(x)\}$$

Cet ensemble est non vide : il contient e . C'est un fermé de G car f et g sont continus et G' est séparé. Enfin, il est ouvert dans G . En effet, \exp est un difféomorphisme d'un voisinage ouvert ω de $\mathbf{0}$ dans \mathcal{G} sur un voisinage ouvert U de e dans G . Vu le point b) de la proposition précédente, f et g coïncident dans U . Soit alors $x_0 \in E$. Alors $x_0 \in x_0U \subset E$. Bien entendu, $x_0 \in x_0U$ puisque $e \in U$. De plus, si $x \in x_0U$, alors

$$f(x) = f(x_0(x_0^{-1}x)) = f(x_0)f(x_0^{-1}x) = g(x_0)g(x_0^{-1}x) = g(x)$$

Mais $x_0U = L_{x_0}(U)$ est un ouvert de G puisque L_{x_0} est un difféomorphisme. Au total, E est ouvert.

Comme G est connexe, le seul sous-ensemble non vide, fermé et ouvert de G est G . Ainsi, $E = G$. \square

Voici alors deux propriétés supplémentaires qu'il est intéressant de connaître mais que nous ne démontrerons pas.

PROPOSITION 5.3. *Si G est simplement connexe et si $\alpha : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie, alors il existe un seul homomorphisme de groupe $f : G \rightarrow G'$ qui soit de classe C^∞ et tel que $f_{*e} = \alpha$.*

PROPOSITION 5.4. *Un homomorphisme de groupes $f : G \rightarrow G'$ est de classe C^∞ si, et seulement si, il est continu.*

6. Les équations de Frenet

Nous allons appliquer la propriété 3.2, page 40, aux équations de Frenet. Cela montrera que les courbes régulières de \mathbf{R}^3 dont la courbure est sans zéro sont classifiées à déplacements près par leur courbure et leur torsion.

Les équations de Frenet s'écrivent

$$(13) \quad \begin{cases} \mathbf{t}' = \kappa \mathbf{n} \\ \mathbf{n}' = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b} \\ \mathbf{b}' = -\tau \mathbf{n} \end{cases}$$

où \mathbf{t} , \mathbf{n} et \mathbf{b} sont la tangente unitaire, la normale principale et la binormale d'une courbe régulière (I, γ) de \mathbf{R}^3 paramétrée par une abscisse curviligne. Les fonctions κ et τ sont la courbure, supposée sans zéros, et la torsion de cette courbe.

En fait, $\mathbf{t} = \gamma'$ et la première équation de Frenet condense, en quelque sorte, les définitions de $\kappa = \|\mathbf{t}'\|$ et de $\mathbf{n} = \mathbf{t}'/\|\mathbf{t}'\|$. La binormale est alors simplement le produit vectoriel $\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$.

Comme \mathbf{t} , \mathbf{n} et \mathbf{b} forment, dans cet ordre, une base orthonormée positive, en les disposant en colonnes, nous obtenons une fonction $F : t \in I \mapsto (\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t))$ dont les valeurs sont des matrices orthogonales et de déterminant positif, c'est-à-dire des éléments du groupe de Lie $SO(3)$. Avec la courbure et la torsion, nous obtenons une fonction à valeurs dans l'espace des matrices antisymétriques, qui est l'algèbre de Lie $so(3)$ de $SO(3)$, à savoir

$$H : t \in I \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(u) & 0 \\ \kappa(u) & 0 & -\tau(u) \\ 0 & \tau(u) & 0 \end{pmatrix} \in so(3)$$

Avec F et H , les équations de Frenet s'écrivent $F' = FH$. Il s'agit d'une équation de la forme (12), page 39, posée sur le groupe de Lie $SO(3)$.

THÉORÈME 6.1. *Soient un intervalle ouvert $I \subset \mathbf{R}$ et des fonctions de classe C^∞ $\kappa : I \rightarrow]0, +\infty[$ et $\tau : I \rightarrow \mathbf{R}$. A déplacement près, il existe une seule courbe régulière (I, γ) de \mathbf{R}^3 dont ce soient respectivement la courbure et la torsion.*

DÉMONSTRATION. Nous conservons les notations des lignes précédentes.

L'existence d'une courbe de courbure κ et de torsion τ résulte immédiatement du théorème 3.2, page 40.

Supposons alors que (I, γ_k) , $k = 1, 2$, soient des courbes régulières de courbure κ et de torsion τ . Soit $t_0 \in I$, choisi arbitrairement, et $A \in SO(3)$ tels que $F_2(t_0) = AF_1(t_0)$. En vertu du même résultat et de la propriété 3.1, page 39, on a alors $F_2 = AF_1$ sur I tout entier. En particulier

$$\gamma_2' = \mathbf{t}_2 = A\mathbf{t}_1 = A\gamma_1'$$

Les fonctions γ_2 et $A\gamma_1$ diffèrent donc par un élément constant de \mathbf{R}^3 : nos courbes sont donc images l'une de l'autre par un déplacement. \square

7. L'exponentielle de $SO(3)$

Nous allons calculer l'exponentielle e^M d'une matrice antisymétrique quelconque

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$

de dimension trois (réelle). Il y a pour cela plusieurs stratégies parmi lesquelles : diagonaliser la matrice, utiliser une équation différentielle, utiliser une équation de récurrence.

Compte tenu du contexte, nous allons utiliser la seconde méthode qui exploite le fait que la fonction définie sur \mathbf{R} par $t \mapsto e^{tM}$ est l'unique solution maximale de l'équation $X' = XM$ dont la valeur en zéro est la matrice unité (que nous noterons I pour alléger l'écriture).

Nous allons ramener cette équation à une équation différentielle scalaire, linéaire et à coefficients constants en profitant du fait que

$$(14) \quad M^3 + (a^2 + b^2 + c^2)M = 0$$

Nous cherchons notre fonction sous la forme

$$e^{tM} = \alpha(t)M^2 + \beta(t)M + \gamma(t)I$$

où α, β et γ sont des fonctions à valeurs réelles. En injectant ceci dans l'équation $X' = XM$, en utilisant (14) puis en identifiant les coefficients des puissances de M , nous obtenons les équations, où $\ell = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$,

$$\begin{cases} \alpha' = \beta \\ \beta' = -\ell^2\alpha + \gamma \\ \gamma' = 0 \end{cases}$$

assorties des conditions initiales

$$\alpha(0) = 0, \quad \beta(0) = 0, \quad \gamma(0) = 1$$

La fonction γ est constante et vaut 1. Quant à α , il vérifie

$$\alpha'' + \ell^2\alpha = 1, \quad \alpha(0) = \alpha'(0) = 0$$

une équation très facile à résoudre. Après de petits calculs, on trouve alors, si ℓ n'est pas nul,

$$e^{tM} = \frac{1}{\ell^2}[1 - \cos(\ell t)]M^2 + \frac{1}{\ell} \sin(\ell t)M + I$$

En particulier,

$$e^M = \frac{1}{\ell^2}[1 - \cos(\ell)]M^2 + \frac{1}{\ell} \sin(\ell)M + I$$

Si ℓ est nul, alors M l'est aussi et $e^{tM} = I$. On peut alors considérer que les deux formules précédentes sont correctes dans ce cas, dans la

mesure où

$$\begin{cases} \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{1}{\ell^2} [1 - \cos(\ell t)] = \frac{1}{2} t^2 \\ \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{1}{\ell} \sin(\ell t) = t \end{cases}$$

Les hélices circulaires. Pour rappel, une hélice circulaire de rayon r et de pas h admet un paramétrage par une abscisse curviligne de la forme

$$\varphi : t \in \mathbf{R} \mapsto \left(r \cos \frac{t}{\sqrt{r^2 + h^2}}, r \sin \frac{t}{\sqrt{r^2 + h^2}}, \frac{ht}{\sqrt{r^2 + h^2}} \right) \in \mathbf{R}^3$$

La courbure et la torsion de l'hélice sont les constantes

$$(15) \quad \kappa = \frac{r}{r^2 + h^2} \quad \& \quad \tau = \frac{h}{r^2 + h^2}$$

Comme dans la section précédente, les équations de Frenet de l'hélice s'écrivent $F' = FH$ où, cette fois, la matrice

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

est constante.

Il résulte de ce qui précède que les solutions maximales de cette équation sont définies dans \mathbf{R} tout entier et s'écrivent AF_0 , où $F_0 : t \mapsto e^{tH}$ et $A \in SO(3)$. En appliquant le début de cette section à H , pour lequel $\ell = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} > 0$, on voit que la première colonne de $F_0(t)$ est

$$\mathbf{t}_0 = \begin{pmatrix} \frac{\kappa^2}{\ell^2} \cos(\ell t) + \frac{\tau^2}{\ell^2} \\ \frac{\kappa}{\ell} \sin(\ell t) \\ -\frac{\kappa\tau}{\ell^2} \cos(\ell t) + \frac{\kappa\tau}{\ell^2} \end{pmatrix}$$

dont les primitives sont les applications γ_0 données par

$$\gamma_0(t) = \begin{pmatrix} \frac{\kappa^2}{\ell^3} \sin(\ell t) + \frac{\tau^2}{\ell^2} t \\ -\frac{\kappa}{\ell^2} \cos(\ell t) \\ -\frac{\kappa\tau}{\ell^3} \sin(\ell t) + \frac{\kappa\tau}{\ell^2} t \end{pmatrix} + \mathbf{a}$$

où \mathbf{a} décrit \mathbf{R}^3 .

Provenant d'une solution des équations (13), chaque application $\gamma_0 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$ est un paramétrage d'une courbe Γ_0 dont la courbure est κ et la torsion τ et toute courbe ayant ces courbure et torsion s'obtient en appliquant un déplacement à Γ_0 .

Nous allons vérifier explicitement qu'il existe une matrice orthogonale de déterminant positif A telle que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \gamma_0(t) = A\varphi(t) + \mathbf{a}$$

Pour le voir, exprimons d'abord φ à l'aide de κ et τ . Les relations (15) s'inversent en

$$r = \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} = \frac{\kappa}{\ell^2} \quad \& \quad h = \frac{\tau}{\kappa^2 + \tau^2} = \frac{\tau}{\ell^2}$$

D'où

$$\varphi(t) = \left(\frac{\kappa}{\ell^2} \cos(\ell t), \frac{\kappa}{\ell^2} \sin(\ell t), \frac{\tau}{\ell} t \right)$$

Par conséquent, comme on le voit immédiatement, la matrice orthogonale de déterminant positif

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\kappa}{\ell} & \frac{\tau}{\ell} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\tau}{\ell} & \frac{\kappa}{\ell} \end{pmatrix}$$

est la matrice cherchée A.

Table des matières

Chapitre 1. Variétés différentielles	3
1. Cartes, atlas et variétés	3
2. Intermède topologique	7
3. Applications différentiables	10
4. L'exercice de Milnor	14
Chapitre 2. Le fibré tangent	18
1. Espace tangent	18
2. Application linéaire tangente	20
3. Quelques remarques en vrac	21
4. Le fibré TM	23
Chapitre 3. Champs de vecteurs	26
1. Champs de vecteurs et dérivations	26
2. Courbes intégrales et flot	29
3. Champs liés	30
4. Crochet de Lie et flot	31
Chapitre 4. L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie	36
1. Groupes de Lie	36
2. Champs de vecteurs invariants à gauche	37
3. Une équation différentielle	39
4. Le flot d'un champ de vecteurs invariant à gauche	41
5. Homomorphismes de groupes de Lie	42
6. Les équations de Frenet	43
7. L'exponentielle de $SO(3)$	45