Equations différentielles d'ordre 2
et
Connexions linéaires

Pierre Lecomte

Table des matières

CHAPITRE 1

Equations d'ordre 2

1. Introduction

Le but de chapitre est de trouver la contre-partie géométrique de la notion de système d'équations différentielles ordinaires et autonomes d'ordre 2. Un tel système prend la forme

$$\left\{\begin{array}{lcl} \ddot{x}^1 & = & f^1(x,\dot{x}) \\ & \vdots & \\ \ddot{x}^m & = & f^m(x,\dot{x}) \end{array}\right. \tag{1}$$

où les f_i sont des fonctions de $x = (x^1, \ldots, x^m)$ et $y = (y^1, \ldots, y^m)$. En adjoignant les équations $\dot{x}^i = y^i$ aux précédentes, on le transforme en un système d'ordre 1 mais ayant deux fois plus d'inconnues.

La contre-partie géométrique d'une solution $x = x(t), t \in I$, d'un tel système est la notion de courbe (I, γ) sur une variété M, dont x est l'expression locale dans une carte. Les fonctions $(x, y = \dot{x})$ donnent alors l'expression locale du vecteur tangent $\dot{\gamma} = d\gamma/dt$ à cette courbe. Les systèmes d'équations différentielles autonomes d'ordre 1 correspondent géométriquement aux champs de vecteurs. Le système transformé nous conduit donc à interpréter (1) comme un certain champ de vecteurs *sur le fibré tangent* TM de M.

On peut aborder le problème plus directement, à condition d'introduire l'équivalent géométrique de la dérivée seconde d'une courbe. Ceci se fait au moyen du fibré T^2M des *vecteurs tangents d'ordre* 2 de M. Le système (1) correspond alors à une certaine fonction $F : TM \to T^2M$ dont les f^i décrivent l'expression locale.

Dans le reste du texte, sauf mention explicite du contraire, M désigne une variété de classe C^∞, connexe, séparée et à base dénombrable. On posera $\dim M = m$.

2. Le fibré des vecteurs tangents d'ordre r

Un *vecteur tangent d'ordre* $r \in \mathbb{N}$ *à* M *en* $a \in M$ est une application linéaire $\mathbf{h} : C^\infty(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dont l'expression locale dans une carte

(U, φ) de M au voisinage de a est de la forme

$$\mathbf{h}(f) = \sum_{1 \leq k \leq r} \sum_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq m} u^{i_1 \cdots i_k} \partial_{i_1 \cdots i_k} (f \circ \varphi^{-1})(\varphi(a)) \tag{2}$$

On vérifie que $\mathbf{h}(f)$ se calcule de la même façon dans toutes les cartes de M au voisinage de a. En conséquence, l'ensemble $T^r_a M$ des vecteurs tangents d'ordre r à M en a est un sous-espace de l'espace vectoriel des applications linéaires de $C^\infty(M, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. De plus, le polynôme $\sigma^{\mathbf{h}}_r : T^*_a M \to \mathbb{R}$ défini par

$$\sigma^{\mathbf{h}}_r(\xi) = \sum_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_r \leq m} u^{i_1 \cdots i_r} \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_r}$$

est également indépendant de la carte. On l'appelle le *symbole* (d'ordre r) de $\mathbf{h}$.

On désigne par $T^r M$ l'ensemble de tous les vecteurs tangents d'ordre r à M et on définit $\pi^r_M : T^r M \to M$ en posant $\pi^r_M(\mathbf{h}) = a$ pour tout $\mathbf{h} \in T^r_a M$.

Il est facile de voir que les coefficients $u^{i_1 \cdots i_k}$ complétés des coordonnées de a définissent une carte de $T^r M$ dont le domaine est l'ensemble des vecteurs tangents d'ordre r aux points de U.

Ces cartes forment un atlas de $T^r M$ qui est donc une variété différentielle. Comme M, elle est séparée, connexe et à base dénombrable. En fait, puisque les $u^{i_1 \cdots i_k}$ dépendent linéairement de $\mathbf{h}$, $(T^r M, \pi^r_M, M)$ est un fibré vectoriel localement trivial.

Pour $r = 1$, on retrouve le fibré tangent à M. On laisse alors tomber l'indice r et on le désigne par (TM, π_M, M). Observons que les fibrés $(T^r M, \pi^r_M, M)$ sont emboîtés :

$$TM \subset T^2 M \subset T^3 M \subset \cdots$$

3. Les équations différentielles d'ordre 2

Par définition, le *vecteur tangent d'ordre* 2 *d'une courbe* (I, γ) *de* M *en* $t_0 \in I$[1] est le vecteur

$$\ddot{\gamma}(t_0) : f \mapsto \frac{d^2}{dt^2}(f \circ \gamma)_{|t=t_0}$$

A l'occasion, on le note aussi

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2}(t_0)$$

[1] Encore appelé *dérivée seconde* ou *accélération* de γ.

Dans une carte (U, φ) de M, on a ([2])

$$\ddot{\gamma}(f) = \sum_{i,j} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j \partial_{ij} f + \sum_i \ddot{\gamma}^i \partial_i f \tag{3}$$

En particulier

$$\sigma_2^{\ddot{\gamma}}(\xi) = \langle \dot{\gamma}, \xi \rangle^2 \tag{4}$$

On attend d'une équation différentielle d'ordre 2 sur M, dont l'expression locale serait donnée par le système (1), qu'elle prenne la forme

$$\ddot{\gamma} = F(\dot{\gamma}) \tag{5}$$

Dans cette expression, F est donc une application de TM dans T^2M. Outre une certaine régularité, il faut d'une part que F vérifie

$$\pi_M^2(F(\mathbf{h})) = \pi_M(\mathbf{h})$$

D'autre part, en tenant compte de (4), il faut également que

$$\forall\ \xi \in T^*M :\ \sigma_2^{F(\mathbf{h})}(\xi) = \langle \mathbf{h}, \xi \rangle^2$$

Ceci nous amène à définir une *équation différentielle d'ordre* 2 *sur* M comme étant une application F de classe C^∞ de TM dans T^2M vérifiant les deux dernières conditions pour tout $\mathbf{h} \in TM$ ([3]).

Dans une carte quelconque, l'expression locale d'une équation F est donc de la forme

$$F(x, h) = \sum_{ij} h^i h^j \partial_{ij} + \sum_i f^i(x, h) \partial_i$$

où les h^i sont les composantes de $\mathbf{h}$ dans la base formée des ∂_i. Une courbe (I, γ) de M est alors une *solution* de l'équation F, c'est-à-dire vérifie (5), si et seulement si, localement, les coordonnées locales $x^i = \gamma^i(t)$ de γ sont solutions du système (1).

Avec nos hypothèses, une telle équation admet toujours des solutions dont on impose le vecteur tangent en un point, unique localement. Cela résulte de théorèmes classiques d'analyse appliqués au système (1). Mais nous obtiendrons facilement les propriétés locales et surtout globales des solutions de F en nous ramenant à une équation d'ordre 1

[2]Pour alléger les notations, et pour autant que cela ne prête pas à confusion, nous désignerons de la même façon un objet et son expression locale. De même, nous omettrons de préciser explicitement en quels arguments sont évaluées les applications et leurs dérivées. Ces conventions sont utilisées dans la formule (3).

[3]La classe de différentiabilité de F pourrait être quelconque, ce qui donnerait éventuellement des résultats d'existence et d'unicité différents de ceux que nous utiliserons plus tard. C'est à cause de la relation avec les connexions linéaires que l'on fait ici cette hypothèse.

comme indiqué dans l'introduction, et en lui appliquant les propriétés classiques des flots de champs de vecteurs.

4. Les champs rabatteurs

Le mécanisme permettant de passer d'un système d'équations d'ordre 2 tel que (1) à un système d'ordre 1 conduit à introduire des champs de vecteurs particuliers sur le fibré tangent TM. En effet, les équations $y^i = \dot{x}^i$ montrent que (x, y) est l'expression locale d'une courbe intégrale (I, α) d'un tel $X \in \mathrm{Vect}(TM)$ et que cette courbe est en même temps la courbe des vecteurs tangents à sa projection $\gamma = \pi_M \circ \alpha$. On a donc

$$\dot{\alpha} = X_\alpha$$

et

$$\dot{\gamma} = \alpha.$$

En particulier,

$$\pi_{M*} X_\alpha = \frac{d}{dt}\pi_M(\alpha) = \dot{\gamma} = \alpha = \pi_{TM} X_\alpha$$

Ceci justifie la définition suivante. Un champs de vecteurs $X \in \mathrm{Vect}(TM)$ est *rabatteur* si

$$\forall\ \mathbf{h} \in TM,\ \pi_{M*} X_{\mathbf{h}} = \pi_{TM} X_{\mathbf{h}}$$

Les arguments précédents sont facilement complétés pour établir la propriété suivante.

Proposition 4.1. *Un champ de vecteurs X sur TM est rabatteur si et seulement si chacune de ses courbes intégrales (I, α) vérifie*

$$\frac{d}{dt}(\pi_M \circ \alpha) = \alpha.$$

Il est commode de disposer de notations simples pour les expressions locales des notions définies sur TTM. C'est pourquoi nous adoptons ce qui suit.

Convention 4.2. Nous noterons en général $x = (x^1, ..., x^m)$ les coordonnées locales associées à une carte de M et

$$(x, h) = (x^1, ..., x^m, h^1, ..., h^m)$$

celles associées à la carte correspondante de TM. En itérant, nous obtenons une carte de TTM, dont les coordonnées sont notées (x, h, k, l). De plus, ∂_i désignera le vecteur tangent associé à la dérivée par rapport à x^i et $\overline{\partial}_i$, celle associée à la dérivée par rapport à h^i.([4])

[4]Ces conventions seront étendues de façon évidente aux fibrés vectoriels (E, p, M). Dans ce cas, h sera remplacé par u qui désignera les composantes d'un

Avec cette convention, un vecteur tangent à TM s'exprimera localement soit sous la forme (x, h, k, l) soit encore sous la forme

$$\sum_i k^i \partial_i + \sum_i l^i \overline{\partial}_i$$

Pour un champ de vecteurs, nous remplacerons souvent k^i et l^i par des fonctions P^i et Q^i de (x, h).

L'expression locale de π_M est alors

$$(x, h) \mapsto x$$

En conséquence, celle de π_{M*} est

$$(x, h, k, l) \mapsto (x, k)$$

Un champ de vecteurs X sur TM est donc rabatteur si et seulement si ses expressions locales sont de la forme (x, h, h, Q)

Une courbe (I, α) de TM est une courbe intégrale d'un tel champ si et seulement si ses expressions locales $t \mapsto (x(t), h(t))$ vérifient

$$(\dot{x}, \dot{h}) = (h, Q(x, h))$$

autrement dit si et seulement si les fonctions x^i sont solutions du système d'équations de la forme (1) où $f^i = Q^i$.

Nous pourrions donc définir une équation différentielle d'ordre 2 comme étant un champ de vecteurs rabatteur X. Une solution de cette équation serait alors une courbe (I, γ) de M telle que

$$(\dot{\gamma})^{\cdot} = X_{\dot{\gamma}}$$

Il nous reste à expliquer que cette définition est équivalente à celle adoptée plus haut et, en particulier, comment relier $\ddot{\gamma}$ et $(\dot{\gamma})^{\cdot}$ ([5]).

5. La seconde fibration du fibré tangent à un fibré vectoriel

Tout fibré vectoriel (E, p, M) donne lieu au diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E & \xleftarrow{\pi_E} & TE \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_*} \\ M & \xleftarrow[\pi_M]{} & TM \end{array} \qquad (6)$$

---

point de la fibre, k par h désignant celles d'un vecteur tangent à M et l par v, représentant celles d'un vecteur tangent à la fibre.

[5]En dépit des notations, $\ddot{\gamma}$ et $(\dot{\gamma})^{\cdot}$ ne sont pas égaux. L'accélération est un vecteur tangent d'ordre 2 de M alors que l'autre est un vecteur tangent à TM.

Avant d'aller plus loin, précisons comment construire des cartes de TE. On choisit d'abord une trivialisation

$$\psi : \xi \in E_{|U} \mapsto (p(\xi), u(\xi)) \in U \times \mathbb{R}^k$$

de E au-dessus d'un domaine de carte (U, φ) de M. On en déduit une carte de E

$$\xi \in E_{|U} \to (x, u) = (\varphi(p(\xi)), u(\xi)) \in \varphi(U) \times \mathbb{R}^k$$

L'avantage d'une telle carte est que ses restrictions aux fibres de E au-dessus de U sont des bijections linéaires entre chacune et $\mathbb{R}^k$.

De façon habituelle, cette carte donne une carte de TE et, avec les conventions adoptées plus haut, le diagramme (6) se lit comme ceci en termes de coordonnées locales correspondantes

$$\begin{array}{ccc} (x,u) & \xleftarrow{\pi_E} & (x,u,h,v) \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_*} \\ x & \xleftarrow[\pi_M]{} & (x,h) \end{array} \tag{7}$$

On voit en particulier que

$$(x, u, h, v) \mapsto (u, v) \tag{8}$$

établit une bijection entre la fibre $p_*^{-1}(\mathbf{h})$ et $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$.

Lemme 5.1. *La structure d'espace vectoriel de $p_*^{-1}(\mathbf{h})$ qui rend cette bijection linéaire ne dépend pas de la carte choisie.*

Démonstration. En effet, l'effet d'un changement de coordonnées locales $x \mapsto \chi(x)$ de M et de trivialisation $(x, u) \mapsto (x, A(x)u)$ de E résulte en le changement de coordonnées

$$(x, u, h, v) \mapsto \big(\chi(x), A(x)u, (\partial\chi)h, \partial(A(x)u)h + A(x)v\big) \tag{9}$$

pour TE. Le lemme est alors immédiat car les composantes de rang 2 et 4 de cette expression sont linéaires en (u, v).

Vu le lemme, chaque fibre de p_* est munie d'une structure d'espace vectoriel. Il est alors facile de faire de (TE, p_*, TM) un fibré vectoriel, en utilisant les applications (8) pour en construire des trivialisations locales. Nous appellerons cette structure la *seconde fibration* de TE.

PROPOSITION 5.2. *Soient un fibré vectoriel (F, q, M) et une application différentiable $f : TE \to F$ rendant le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} TE & \xrightarrow{f} & F \\ {\scriptstyle p_*}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle q} \\ TM & \xrightarrow[\pi_M]{} & M \end{array}$$

commutatif. L'application f est un morphisme de fibrés vectoriels pour la seconde fibration de TE si et seulement si ([6])

$$\forall s \in \mathbb{R},\ f \circ \theta_s^{TE} = \theta_s^F \circ f \tag{10}$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de vérifier que la condition (10) équivaut au fait que les restrictions de f aux fibres de (TE, p_*, TM) sont linéaires. Or, en cordonnées locales, si $f : (x, u, h, v) \mapsto (x, f(x, u, h, v))$ alors cette condition s'écrit $f(x, su, h, sv) = sf(x, u, h, v)$. D'où la conclusion.

6. L'application ν

On va introduire une application $\nu : TTM \to T^2M$ avec laquelle il sera facile de faire le pont entre les deux définitions de la notion d'équation différentielle ordinaire d'ordre 2. Si $H \in T_{\mathbf{h}}TM$, alors on définit $H^\nu \in T^2_{\pi_M(\mathbf{h})}M$ en posant

$$H^\nu(f) = H.(df)$$

pour tout $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Dans cette formule, on regarde la différentielle de f comme une fonction sur TM, à savoir

$$df : \mathbf{h} \mapsto \mathbf{h}.f$$

PROPOSITION 6.1. *a) L'application ν est un morphisme de fibrés vectoriels de (TTM, π_{M*}, TM) dans (T^2M, π_M^2, M) au-dessus de π_M.*
b) Si $H \in T_{\mathbf{h}}TM$, alors

$$\sigma_2^{H^\nu}(\xi) = \langle \pi_{M*}H, \xi\rangle\langle \pi_{TM}H, \xi\rangle$$

DÉMONSTRATION. Cela résulte immédiatement de l'expression locale de H^ν. Si l'expression de H est (x, h, k, l) alors celle de $H^\nu(f)$ est en effet

$$H^\nu(f) = \sum_{ij} h^i k^j \partial_{ij} f + \sum_i l^i \partial_i f \tag{11}$$

[6] Pour tout fibré vectoriel (E, p, M), on note θ_s^E la multiplication $u \mapsto su$ par s.

Proposition 6.2. *Un élément $H \in TTM$ est nul si et seulement si $\pi_{M*}H = 0$ et $H^\nu = 0$.*

Démonstration. En effet, en coordonnées locales, $\pi_{M*}H = 0$ se traduit par $k = 0$. Lorsque $k = 0$, la formule (11) montre alors que si, en plus, $H^\nu = 0$, alors $l = 0$.

La propriété suivante s'avère utile.

Proposition 6.3. *Soit $H \in T_{\mathbf{h}}TM$. Si $\pi_{M*}H = \mathbf{0}$ ou si $\pi_{TM}H = \mathbf{0}$, alors $H^\nu \in TM$. Dans le premier cas, H est le vecteur tangent en $t = 0$ à la courbe $t \mapsto \mathbf{h} + t\, H^\nu$ de TM.*

Démonstration. Immédiat en coordonnées locales, vu (11).

7. Equation d'ordre 2 versus champ rabatteur

L'application ν permet d'abord de comparer les deux sorte de "dérivées secondes" d'une courbe que nous avons rencontrées.

Proposition 7.1. *Soit une courbe (I, γ) de M. On a*

$$\pi_{M*}(\dot\gamma)^{\cdot} = \dot\gamma \text{ et } ((\dot\gamma)^{\cdot})^\nu = \ddot\gamma$$

Démonstration. En effet, d'une part,

$$\pi_{M*}(\dot\gamma)^{\cdot} = \frac{d}{dt}(\pi_M\dot\gamma) = \dot\gamma.$$

D'autre part, pour toute fonction de classe C^∞ sur M,

$$((\dot\gamma)^{\cdot})^\nu(f) = (\dot\gamma)^{\cdot}.df = \frac{d}{dt}(df(\dot\gamma)) = \frac{d}{dt}(\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)) = \ddot\gamma(f)$$

Voici enfin la relation liant les deux définitions possibles des équations différentielles d'ordre 2 sur une variété.

Théorème 7.2. *L'application qui à $X \in \mathrm{Vect}(TM)$ associe la fonction*

$$F_X : \mathbf{h} \in TM \mapsto X^\nu_{\mathbf{h}} \in T^2M$$

établit une correspondance biunivoque entre les champs de vecteurs rabatteurs et les équations différentielles d'ordre 2. De plus, si X est rabatteur, alors une courbe (I, γ) de M est solution de l'équation F_X si et seulement si $(I, \dot\gamma)$ est une courbe intégrale de X.

Démonstration. i) Si X est rabatteur, la fonction F_X est bien une équation différentielle d'ordre 2. En effet, vu la Propositon 6.1,

$$\pi^2_M F_x(\mathbf{h}) = \pi^2_M X^\nu_{\mathbf{h}} = \pi_M \pi_{M*} X_{\mathbf{h}} = \pi_M \mathbf{h}$$

et

$$\sigma_2^{F_X}(\mathbf{h})(\xi) = \langle \pi_{M*}X_{\mathbf{h}}, \xi\rangle\langle \pi_{TM}X_{\mathbf{h}}, \xi\rangle = \langle \mathbf{h}, \xi\rangle^2$$

car X est rabatteur.
ii) L'application $X \mapsto F_X$ est injective dans l'ensemble des champs de vecteurs rabatteurs. Plus précisément, si X et Y sont rabatteurs et si $F_X(\mathbf{h}) = F_Y(\mathbf{h})$, alors on a

$$\pi_{M*}(X_{\mathbf{h}} - Y_{\mathbf{h}}) = 0 \text{ et } (X_{\mathbf{h}} - Y_{\mathbf{h}})^{\nu} = 0$$

On en conclut que $X_{\mathbf{h}} = Y_{\mathbf{h}}$ par la Proposition 6.2.
iii) Pour toute équation différentielle F, il existe un champ de vecteurs rabatteur X tel que $F = F_X$. Il est évident que si U est un domaine de carte de M, on peut construire un champ rabatteur X_U sur $TM_{|U}$ tel que $F = F_{X_U}$ dans cet ouvert de TM. Vu ce qu'on a démontré en ii), si $U \cap V \neq \emptyset$, alors les champs X_U et X_V coïncident dans $TM_{|U} \cap TM_{|V}$. Les X_U se prolongent donc mutuellement et définissent un champ X répondant à la question.
iv) Pour terminer la démonstration, il suffit d'appliquer la Proposition 7.1

Dans la suite, nous dirons que le champ rabatteur X et l'équation d'ordre 2 F_X sont *associés* l'un à l'autre.

CHAPITRE 2

Equations isochrones

1. Introduction

Sans entrer dans les détails, le caractère *isochrone* d'une équation du second ordre se traduit par le fait que la solution $t \mapsto \gamma(t, \mathbf{h})$ qui est tangente à $\mathbf{h} \in TM$ en $t = 0$ ne dépend de t et de $\mathbf{h}$ que par l'intermédiaire de leur produit $t\mathbf{h}$. Ceci confère aux solutions de ces équations des propriétés particulières qui leur font jouer un rôle important dans nombre de situations. On les retrouve par exemple comme géodésiques des variétés riemanniennes, comme exponentielles des groupes de Lie, avec comme cas particuliers familiers, l'application exponentielle $z \in \mathbb{C} \mapsto e^z \in \mathbb{C}$ ou encore la description paramétrique $t \mapsto a + tb$ des droites.

En fait, la donnée d'une équation du second ordre isochrone équivaut pratiquement à la donnée d'une connexion linéaire. Les relations entre ces deux notions seront analysées en détails ultérieurement. Le présent chapitre est consacré à l'étude des propriétés des solutions des équations isochrones.

2. Les champs de vecteurs isochrones

Par définition, un champ de vecteur $X \in \mathrm{Vect}(TM)$ est *isochrone* si

$$\forall s \in \mathbb{R},\ X \circ \theta_s^{TM} = \theta_s^{TTM} \circ \theta_{s*}^{TM} \circ X$$

Evaluée en $\mathbf{h} \in TM$, cette égalité se lit encore

$$X_{s\mathbf{h}} = s\theta_{s*}^{TM} X_{\mathbf{h}} \tag{12}$$

On peut caractériser cette propriété à l'aide du flot $(t, \mathbf{h}) \mapsto \Phi_t(\mathbf{h})$ de X. Nous désignerons par $I_{\mathbf{h}}$ l'intervalle de définition de la courbe $t \mapsto \Phi_t(\mathbf{h})$.

Proposition 2.1. *Un champ de vecteurs X est isochrone si et seulement si, pour tout $\mathbf{h} \in TM$ et tout $s \in \mathbb{R}$*[1]*,*

$$I_{s\mathbf{h}} = \frac{1}{s} I_{\mathbf{h}}$$

et

$$\forall t \in I_{sh},\ \Phi_t(s\mathbf{h}) = s\Phi_{st}(\mathbf{h})$$

Démonstration. Supposons d'abord que X soit isochrone. La courbe $t \mapsto s\Phi_{st}(\mathbf{h})$ est définie dans $\frac{1}{s}I_{\mathbf{h}}$ dans lequel nous avons

$$\frac{d}{dt}\big(s\Phi_{st}(\mathbf{h})\big) = \theta^{TM}_{s*}(s\frac{d}{du}\Phi_u(\mathbf{h}))_{|u=st} = s\theta^{TM}_{s*}X_{\Phi_st}(\mathbf{h}) = X_{s\Phi_{st}(\mathbf{h})}$$

Cela montre que

$$\frac{1}{s}I_{\mathbf{h}} \subset I_{s\mathbf{h}} \tag{13}$$

et que

$$\forall t \in \frac{1}{s}I_{\mathbf{h}},\ \Phi_t(s\mathbf{h}) = s\Phi_{st}(\mathbf{h})$$

En remplaçant s par $1/s$ et $\mathbf{h}$ par $s\mathbf{h}$, on obtient l'inclusion réciproque de (13) qui devient donc une égalité comme annoncé.

La réciproque est immédiate.

Le fait que X soit isochrone se traduit dans toute carte de TM déduite d'une carte de M par le fait que son expression locale est de la forme

$$X = \sum_i (P^i(x,h)\partial_i + Q^i(x,h)\overline{\partial}_i)$$

où les fonctions P^i sont homogènes de degré 1 en h et les fonctions Q^i sont homogènes de degré 2 en h. En effet, l'expression locale de la différentielle de θ^{TM}_s est

$$(x,h,k,l) \mapsto (x,sh,k,sl)$$

si bien que l'égalité (12) se lit

$$(x,sh,P(x,sh),Q(x,sh)) = (x,sh,sP(x,h),s^2Q(x,h))$$

Ceci équivaut à $P(x,sh) \equiv sP(x,h)$ et $Q(x,sh) \equiv s^2Q(x,h)$ c'est-à-dire au fait que les fonctions P et Q sont des polynômes en h, de degré respectif 1 et 2.

En particulier, un champ isochrone peut être rabatteur. En effet, pour un champ rabatteur, $P(x,h) \equiv h$ est du premier degré en h.

[1] En principe, ce qui suit suppose que $s \neq 0$. Mais, à condition de poser $\frac{1}{0}I_{\mathbf{h}} = \mathbb{R}$, c'est vrai aussi lorsque $s = 0$. Nous supposons implicitement $s \neq 0$ dans la preuve, laissant le soin au lecteur de traiter le cas particulier $s = 0$ à part.

PROPOSITION 2.2. *Le champ de vecteurs rabatteur associé à une équation différentielle F d'ordre 2 est isochrone si et seulement si*

$$\forall s \in \mathbb{R},\ \theta_{s^2}^{T^2M} \circ F = F \circ \theta_s^{TM}$$

DÉMONSTRATION. Notons X le champ associé à F. Comme il est rabatteur, on a

$$\pi_{M*} X_{s\mathbf{h}} = s\mathbf{h} = \pi_{M*} s\theta_{s*}^{TM} X_{\mathbf{h}}$$

D'autre part,

$$X_{s\mathbf{h}}^{\nu} = F(s\mathbf{h})$$

et

$$(s\theta_{s*}^{TM} X_{\mathbf{h}})^{\nu} = s^2 F(\mathbf{h}).$$

Il suffit alors d'appliquer la Proposition 6.2 pour conclure.

3. L'application exponentielle d'un champ rabatteur isochrone

Le flot $(t, \mathbf{h}) \mapsto \Phi_t(\mathbf{h})$ d'un champ isochrone et rabatteur X est défini dans un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times TM$. Comme $X_{\mathbf{0}} = 0$,

$$\Omega_1 = \left\{\mathbf{h} \in TM | (1, \mathbf{h}) \in \Omega\right\}$$

contient la section nulle([2]). La Proposition 2.1 montre de plus que chaque intersection

$$\Omega_1 \cap T_x M$$

est un ouvert radial centré sur $\mathbf{0}_x$. En effet, si $\mathbf{h} \in \Omega_1 \cap T_x M$ et $t \in]0, 1]$, alors $t \in I_{\mathbf{h}}$ et donc $1 \in \frac{1}{t} I_{\mathbf{h}} = I_{t\mathbf{h}}$.

Par définition, l'*application exponentielle* du champ rabatteur isochrone X est la fonction

$$\exp : \mathbf{h} \in \Omega_1 \mapsto \exp(\mathbf{h}) = \pi_M(\Phi_1(\mathbf{h})) \in M$$

PROPOSITION 3.1. *L'application*

$$t \in I_{\mathbf{h}} \mapsto \exp(t\mathbf{h}) \in M$$

est la solution maximale de l'équation différentielle d'ordre 2 *associée à* X *qui soit tangente à* $\mathbf{h}$ *en* $t = 0$.

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence immédiate de la Proposition 2.1.

Les ensembles

$$\left\{ \exp(th) | t \in [a, b] \right\}$$

où $[a, b] \subset I_{\mathbf{h}}$, s'appellent *arcs de trajectoire* de X.

[2]C'est l'ensemble des vecteurs tangents nuls de M. On l'identifie à M en confondant chaque point avec le vecteur tangent nul en ce point.

Pour rappel, si $s \in I_{\mathbf{h}}$ alors $t \in I_{\Phi_s(\mathbf{h})}$ si et seulement si $t+s \in I_{\mathbf{h}}$ et, si cette condition est vérifiée,

$$\Phi_t(\Phi_s(\mathbf{h})) = \Phi_{t+s}(\mathbf{h})$$

En appliquant cela, il vient aussitôt

Proposition 3.2. *Si $s \in I_{\mathbf{h}}$ et si*

$$\mathbf{k} = \frac{d}{dt} \exp(t\mathbf{h})_{|t=s}$$

alors $I_{\mathbf{k}} = I_{\mathbf{h}} - s$ et

$$\forall t \in I_{\mathbf{k}},\ \exp(t\mathbf{k}) = \exp((t+s)\mathbf{h})$$

4. Un exemple : l'exponentielle des groupes de Lie

Le flot $(t,g) \mapsto \varphi_t(g)$ d'un champ invariant à gauche d'un groupe de Lie G est tel que

$$\forall g, g' \in G, \quad g\varphi_t(g') = \varphi_t(gg')$$

et il est défini pour tout $t \in \mathbb{R}$. En particulier, $\varphi_t(g) = g\varphi_t(e)$ où e est le neutre de G. Notons u l'élément de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G qui engendre le champ invariant. Par définition, l'application exponentielle $\exp_G : \mathfrak{g} \to G$ de G est donnée par

$$\exp_G(u) = \varphi_1(e)$$

On a alors

$$\varphi_t(g) = g \exp_G(tu)$$

Cette propriété n'est pas sans rappeler celle du flot des champs isochrones. Ce n'est pas par hasard, ainsi qu'on va le découvrir ci-dessous.

4.1. Les fibrés TG et TTG. En utilisant les champs invariants à gauche, on obtient une trivialisation globale

$$\psi_G : \mathbf{h} \in T_gG \mapsto (g, g^{-1}\mathbf{h}) \in G \times \mathfrak{g}$$

de TG([3]). Cela permet de définir une structure de groupe de Lie sur TG, par transport de structure du produit semi-direct

$$((g,u),(g',u')) \mapsto (gg', u + ad_g(u'))$$

défini sur $G \times \mathfrak{g}$([4]). Il est facile de vérifier que si $(\mathbf{h}, w) \in T_{(g,u)}(G \times \mathfrak{g})$ alors

$$\psi_{G\times\mathfrak{g}}((\mathbf{h}, w)) = (g, u, g^{-1}\mathbf{h}, ad_{g^{-1}}w) \tag{14}$$

[3]De façon générale, nous noterons respectivement $g\mathbf{h}$ et $\mathbf{h}g$ les valeurs en $\mathbf{h}$ des applications linéaires tangentes à la multiplication à gauche et à droite par g.

[4]Pour rappel, $ad_g(u) = gug^{-1}$.

Nous obtenons ainsi une sorte de trivialisation

$$\tau = \psi_{G\times\mathfrak{g}} \circ \psi_{G*} : TTG \to G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$$

Plus précisément,

Proposition 4.1. *a)* $\psi_G \circ \pi_{TG} \circ \tau^{-1} : (g,u,v,w) \mapsto (g,u)$
b) $\psi_G \circ \pi_{G*} \circ \tau^{-1} : (g,u,v,w) \mapsto (g,v)$
En particulier, $H \in \mathrm{Vect}(TG)$ *est rabatteur si et seulement si* $\tau(H)$([5]) *est de la forme*

$$(g,u) \mapsto (g,u,u,F(g,u))$$

où $F \in C^\infty(G \times \mathfrak{g}, \mathbb{R})$.

Démonstration. Pour a), il suffit de noter que

$$\pi_{G\times\mathfrak{g}} \circ \psi_{G*} = \psi_G \circ \pi_{TG}$$

puis d'appliquer la formule (14). Pour b), on constate d'abord que, p_1 désignant la projection sur le premier facteur,

$$\pi_{G*} = p_{1*} \circ \psi_{G*} = p_{1*} \circ \psi^{-1}_{G\times\mathfrak{g}} \circ \tau$$

Ensuite, en utilisant (14), on obtient

$$\psi^{-1}_{G\times\mathfrak{g}}(g,u,v,w) = (gv, ad_g(w)) \in T_{(g,u)}(G \times \mathfrak{g})$$

En combinant ces deux observations, il vient

$$\psi_G \circ \pi_{G*} \circ \tau^{-1}(g,u,v,w) = \psi_G(gv) = (g,v).$$

Le cas particulier est immédiat, vu a) et b).

Dans le même ordre d'idée que la proposition précédente, on a

Proposition 4.2. *a)*

$$\tau \circ \theta^{TG}_{s*} \circ \tau^{-1}(g,u,v,w) = (g,su,v,sw)$$

b)

$$\tau \circ \theta^{TTG}_{s} \circ \tau^{-1}(g,u,v,w) = (g,u,sv,sw)$$

En conséquence, si

$$\tau(H)(g,u) = (g,u,V(g,u),W(g,u))$$

alors $H \in \mathrm{Vect}(TG)$ *est isochrone si et seulement si* V *est linéaire en* u *et* W *est quadratique en* u.

[5]Il s'agit de l'application $\tau \circ H \circ \psi_G^{-1}$.

DÉMONSTRATION. Observons que

$$\psi_G \circ \theta_s^{TG} = \theta_s^{G\times\mathfrak{g}} \circ \psi_G \tag{15}$$

et donc que

$$\psi_{G*} \circ \theta_{s*}^{TG} = \theta_{s*}^{G\times\mathfrak{g}} \circ \psi_{G*}$$

Or pour $(\mathbf{h}, w) \in T_{(g,u)}(G \times \mathfrak{g})$,

$$\theta_{s*}^{G\times\mathfrak{g}}(\mathbf{h}, w) = (\mathbf{h}, sw) \in T_{(g,su)}(G \times \mathfrak{g}).$$

La formule a) résulte alors de (14).

Pour b), il suffit de noter que

$$\psi_{G*} \circ \theta_s^{TTG} = \theta_s^{T(G\times\mathfrak{g})} \circ \psi_{G*}$$

puis d'appliquer l'analogue de la formule (15) pour le groupe $G \times \mathfrak{g}$.

La conséquence est immédiate.

4.2. L'exponentielle de G. Le groupe G possède un champ de vecteurs rabatteur et isochrone canonique. C'est le champ

$$H^G : \mathbf{h} \in T_gG \mapsto \tau^{-1}(g, g^{-1}\mathbf{h}, g^{-1}\mathbf{h}, 0) \in T_{\mathbf{h}}TG$$

PROPOSITION 4.3. *L'application exponentielle du champ H^G est définie dans TG tout entier. C'est l'application*

$$\mathbf{h} \in T_gG \mapsto g \exp_G(g^{-1}\mathbf{h})$$

DÉMONSTRATION. Soit une courbe (I, γ) de G. On a

$$\tau((\dot\gamma)^{\cdot}) = \psi_{G\times\mathfrak{g}}((\psi_G(\dot\gamma))^{\cdot}) = \psi_{G\times\mathfrak{g}}(\dot\gamma, (\gamma^{-1}\dot\gamma)^{\cdot}) = (\gamma, \gamma^{-1}\dot\gamma, \gamma^{-1}\dot\gamma, ad_\gamma^{-1}((\gamma^{-1}\dot\gamma)^{\cdot}))$$

Par conséquent, (I, γ) est une solution de l'équation différentielle associée au champ H^G si et seulement si

$$(\gamma^{-1}\dot\gamma)^{\cdot} = \mathbf{0}.$$

Autrement dit, $u = \gamma^{-1}\dot\gamma \in \mathfrak{g}$ est constant et (I, γ) est une courbe intégrale du champ invariant à gauche u^*, ce qui démontre la proposition.

4.3. Exemples. Il peut être déconcertant que la quatrième composante de $\tau(H^G)$ soit nulle. Nous comprendrons un peu mieux pourquoi on peut trouver de tels champs sur G quand nous étudierons la courbure des connexions linéaires. En attendant, il est intéressant de voir à quoi ressemble l'expression locale du champ H^G pour $G = GL(m, \mathbb{R})$. Les coordonnées sont les coordonnées canoniques de l'espace $\mathbb{R}^{m^2} \equiv gl(m, \mathbb{R})$ dont G est un ouvert. Dans cette carte, l'expression de ψ_G est

$$(x, h) \in GL(m, \mathbb{R}) \times gl(m, \mathbb{R}) \mapsto (x, x^{-1}h) \in GL(m, \mathbb{R}) \times gl(m, \mathbb{R})$$

Celle de son application linéaire tangente prend donc la forme

$$(x,h,k,l) \mapsto (x, x^{-1}h, k, -x^{-1}kx^{-1}h + x^{-1}l)$$

Pour $\psi_{G\times\mathfrak{g}}$, on obtient (cf. (14))

$$(x,u,h,w) \in T_{(x,u)}(G\times\mathfrak{g}) \mapsto (x,u,x^{-1}h, x^{-1}wx) \in G\times\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$$

Finalement, l'expression de τ est

$$(x,h,k,l) \mapsto (x, x^{-1}h, x^{-1}k, -x^{-2}kx^{-1}hx + x^{-2}lx)$$

Le champ H^G est donc le champ d'expression locale

$$(x,h) \mapsto (x,h,h,hx^{-1}h)$$

L'équation différentielle du second ordre associée se lit alors

$$\ddot{x} = \dot{x}x^{-1}\dot{x}$$

Ce système admet l'intégrale première $f(x,h) = x^{-1}h$. En effet, le long d'une solution,

$$f(x,\dot{x})^{\cdot} = -x^{-1}\dot{x}x^{-1}\dot{x} + x^{-1}\ddot{x} = x^{-1}(-\dot{x}x^{-1}\dot{x} + \ddot{x}) = 0.$$

On retrouve ainsi directement l'équation différentielle définissant l'exponentielle de la matrice a

$$\frac{dx}{dt} = xa, \quad x(0) = 1$$

Un calcul analogue mais plus léger, permet de voir que le champ rabatteur et isochrone canonique du groupe commutatif $\mathbb{R}^m$ est $(x,h) \mapsto (x,h,h,0)$. Les solutions de l'équation différentielle d'ordre deux associée à ce champ sont les applications

$$t \mapsto at + b.$$

décrivant les droites de $\mathbb{R}^m$.

5. Application exponentielle et topologie des variétés

5.1. Un lemme topologique. Cette sous-section est consacrée à la démonstration d'un résultat toplogique qui nous sera bien utile dans l'étude des propriétés globales de l'application exponentielle d'un champ de vecteurs rabatteur et isochrone.

LEMME 5.1. *Soient des espaces topologiques séparés et à base dénombrable E et E' et un homéomorphisme local $f : E \to E'$ injectif sur une partie $A \subset E$, alors il existe un voisinage ouvert ω de A dans lequel f est injectif. En conséquence, si $f(A)$ est un ouvert de E', alors A est un ouvert de E.*

Première partie de la preuve. Vérifions que *si f est injectif sur $B \subset E$ et si $x \in B$, alors il existe un voisinage ouvert U de x tel que $f|(B \cup U)$ soit injectif.*

On procède par l'absurde. On considère pour cela une base dénombrable et décroissante([6]) $\{\omega_n, n \in \mathbb{N}\}$ des voisinages de x. Puisque f est un homéomorphisme local, il existe p tel que $f|\omega_p$ soit injectif. Comme $f|(B \cup \omega_n)$ n'est pas injectif, il existe $x_n, y_n \in B \cup \omega_n$ tel que $x_n \neq y_n$ et $f(x_n) = f(y_n)$. Dès que $n \geq p$, on peut supposer que $x_n \in \omega_n$ et $y_n \notin \omega_p$. Puisque x_n tend vers x([7]), $f(y_n) = f(x_n)$ tend vers $f(x)$. Mais alors, f étant un homéomorphisme entre B et $f(B)$, y_n tend vers x, ce qui implique que $y_n \in \omega_p$ pour tout n assez grand. D'où la contradiction.

Existence de ω. Considérons une base dénombrable $\{U_n, n \in \mathbb{N}\}$ des ouverts de E. Soit $x \in A$([8]). Vu la première partie de la démonstration, il existe un indice n_1 tel que $x \in U_{n_1}$ et $f|(A \cup U_{n_1})$ soit injectif. Nous choisissons cet indice le plus petit possible. Si $A \subset U_{n_1}$, la preuve est terminée. Sinon, on recommence avec $A \cup U_{n_1}$ et on peut trouver un plus petit indice n_2 tel que f soit injectif dans $A \cup U_{n_1} \cup U_{n_2}$. On a $n_1 < n_2$, sinon, comme $f|(A \cup U_{n_2})$ est injectif, on contredit le choix de n_1.

En continuant de la sorte, on construit une suite $n_1 < n_2 < \cdots$ telle que les restrictions

$$f|(A \cup U_{n_1} \cup \cdots \cup U_{n_p})$$

soient injectives, les indices étant toujours choisis les plus petits possible. La construction s'achève au premier indice n_p pour lequel

$$A \subset U_{n_1} \cup \cdots \cup U_{n_p} \tag{16}$$

Si un tel indice n'arrive pas, alors f est injectif sur

$$A \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}}^{\infty} U_{n_k}$$

Dans ce cas,

$$A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}}^{\infty} U_{n_k} \tag{17}$$

[6]Cela signifie : ... $\omega_n \supset \omega_{n+1}$... Si elle ne l'était pas, on la rendrait décroissante en remplaçant chaque ω_n par $\omega_1 \cap \cdots \cap \omega_n$.

[7]Une suite u_n tend vers u si u_n rentre dans tout voisinage ω de u : il existe n_0 tel que $n \geq n_0$ entraîne $u_n \in \omega$.

[8]On peut bien entendu supposer $A \neq \emptyset$.

Sinon, en appliquant de nouveau la première partie de la preuve, on trouverait un indice n tel que f soit injectif sur

$$A \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}}^{\infty} U_{n_k} \cup U_n$$

Ce n est compris entre deux n_k consécutifs : $n_{i-1} < n < n_i$. Mais alors, comme f est injectif sur $A \cup U_{n_1} \cup \cdots \cup U_{n_{i-1}} \cup U_n$, n_i n'est pas le plus petit des indices k pour lesquels f est injectif sur $A \cup U_{n_1} \cup \cdots \cup U_{n_{i-1}} \cup U_k$.

Dans le cas (16), comme dans le cas (17), on voit que l'union ω des U_{n_i} convient.

Fin de la preuve. Si f est injectif dans un ouvert ω, $f(\omega)$ est un ouvert de E' et $f|\omega$ est un homéomorphisme de ω sur cet ouvert. Si $A \subset \omega$ et si $f(A)$ est un ouvert de E', c'est aussi un ouvert de $f(\omega)$. Par conséquent,

$$A = (f|\omega)^{-1} f(A)$$

est un ouvert de ω, donc de E.

5.2. L'application $\pi_M \times \exp$. Considérons un champ de vecteurs X rabatteur et isochrone. Voici une première propriété de son application exponentielle exp.

PROPOSITION 5.2. *L'application*

$$\pi_M \times \exp : \mathbf{h} \mapsto (\pi_M(\mathbf{h}), \exp(\mathbf{h}))$$

est un difféomophisme d'un voisinage ouvert Ξ de la section nulle de TM sur un voisinage ouvert de la diagonale

$$\Delta M = \{(x, x) | x \in M\}$$

de $M \times M$.

DÉMONSTRATION. L'application $\pi_M \times \exp$ est un difféomorphisme *local* d'un voisinage de la section nulle de TM sur un voisinage de ΔM. Pour voir cela, on montre que sa différentielle en $\mathbf{0}_x$ est non singulière, quelque soit $x \in M$. Il suffit en fait de vérifier qu'elle est injective puisque les dimensions de TM et de $M \times M$ sont égales.

Supposons donc que $H \in T_{\mathbf{0}_x} TM$ et que $(\pi_{M*} \times \exp_*) H = (\mathbf{0}_x, \mathbf{0}_x)$. Appliquons la Proposition 6.3 : $H^\nu \in T_x M$ et H est tangent à $t \mapsto tH^\nu$ en $t = 0$. Donc

$$H^\nu = \frac{d}{dt} \exp(tH^\nu)_{t=0} = \exp_* H = 0$$

Comme $\pi_{M*} H = 0$, la Proposition 6.2 montre alors que $H = 0$. Pour conclure, on applique le Lemme 5.1 en notant que $\pi_M \times \exp$ est injectif sur la section nulle.

5.3. Voisinages normaux. Un voisinage ω d'un point a est dit *normal* (par rapport à a) s'il existe un ouvert étoilé Ω de T_aM([9]) tel que $\exp : \Omega \to \omega$ soit un difféomorphisme.

PROPOSITION 5.3. *Si ω est un voisinage normal par rapport à a, alors tout point $x \in \omega$ est joint à a par exactement un arc de trajectoire contenu dans ω.*

DÉMONSTRATION. Posons $\mathbf{h} = (\exp_{|\Omega})^{-1}(x)$. Puisque Ω est étoilé, l'arc de trajectoire $\exp([0,1]\mathbf{h})$ est contenu dans ω où il joint a et x. Il reste à vérifier l'unicité. Vu la Proposition 3.2, un arc de trajectoire joignant a à x est de la forme $\exp([0,u]\mathbf{k})$. On peut supposer que $u\mathbf{k} \notin \Omega$, sinon, $u\mathbf{k} = \mathbf{h}$ et l'arc coïncide avec le précédent. Soit $s \in [0,u]$ le plus petit t tels que $t\mathbf{k} \notin \Omega$. Comme $b := \exp(s\mathbf{k}) \in \omega$, on a

$$s\mathbf{k} = \lim_{\substack{t \to s \\ t < s}} t\mathbf{k} = \lim_{\substack{t \to s \\ t < s}} (\exp_{|\Omega})^{-1}(\exp(t\mathbf{k})) = (\exp_{|\Omega})^{-1}(b) \in \Omega$$

C'est une contradiction.

On a vu, lors de la preuve de la Proposition 5.2, que la différentielle de $\exp_{|T_aM}$ à l'origine est non singulière. Par conséquent, en vertu du théorème de la fonction inverse, a admet une base de voisinages normaux (par rapport à lui-même). En exploitant la Proposition 5.2 et le caractère quadratique de l'équation différentielle générant les trajectoires de X, on obtient une propriété beaucoup plus forte.

PROPOSITION 5.4. *Tout point de M possède une base de voisinages qui sont normaux par rapport à chacun de leurs points.*

DÉMONSTRATION. Fixons $a_0 \in M$ et une carte (U, φ) de M dont le domaine contient a_0. Nous supposons que $\varphi(a_0) = 0$. Dans la carte, l'expression locale du champ X est de la forme

$$(x, h) \mapsto (x, h, h, F(x, h))$$

où F est homogène d'ordre de 2 en h. Par suite, ε_0 étant choisi pour que $\{x \| x| \leq \varepsilon_0\} \subset \varphi(U)$, il existe un nombre c tel que

$$\sup_{\substack{|x| \leq \varepsilon_0 \\ h \neq 0}} \frac{|F(x,h)|}{|h|^2} = \sup_{\substack{|x| \leq \varepsilon_0 \\ h = 1}} |F(x,h)| \leq c$$

ou encore tel que

$$|x| \leq \varepsilon_0 \Longrightarrow |F(x,h)| \leq c|h|^2$$

[9]Cela signifie ici que $o_a \in \Omega$ et que $[0,1]\mathbf{h} \subset \Omega$ pour tout $\mathbf{h} \in \Omega$.

Prenons $\varepsilon_1 \leq \inf\{\varepsilon_0, c^{-1}\}$ et posons $\omega_1 = \{x||\varphi(x)| < \varepsilon_1\}$. Vu la Proposition 5.2, on peut trouver un ouvert Ξ de TM, radial([10]) et tel que $\pi_M \times \exp$ soit un difféomorphisme de Ξ sur un ouvert de $\omega_1 \times \omega_1$.

Nous allons vérifier que, pour tout nombre positif $\varepsilon < \varepsilon_1$ tel que

$$\omega \times \omega \subset (\pi_M \times \exp)(\Xi)$$

où $\omega = \{x \in \omega_1||\varphi(x)| < \varepsilon\}$, ce dernier est un voisinage normal par rapport à chacun de ses points.

Notons Ξ' l'ouvert $(\pi_M \times \exp)^{-1}(\omega \times \omega)$. Soient $x, y \in \omega$. Il existe $\mathbf{h} \in \Xi' \cap T_xM$ tel que $\exp(\mathbf{h}) = y$ et nous devons prouver que $[0,1]\mathbf{h} \subset \Xi'$. On sait déjà que $\exp([0,1]\mathbf{h}) \subset \omega_1$. Il reste à s'assurer de ce que

$$\forall t \in [0,1] : \ |\varphi(\exp(t\mathbf{h}))| < \varepsilon$$

Posons $x_t = \varphi(\exp(t\mathbf{h}))$. Il vient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(|x_t|^2)^{\cdot\cdot} &= |\dot{x}_t|^2 + \sum_{i=1}^m x_t^i F^i(x_t, \dot{x}_t) \\ &\geq |\dot{x}_t|^2 - |x_t||F(x_t, \dot{x}_t)| \\ &\geq (1 - \varepsilon_1 c)|\dot{x}_t|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

La fonction $t \in [0,1] \mapsto |x_t|^2 \in \mathbb{R}$ est donc convexe. Par conséquent

$$\sup_{t \in [0,1]} |x_t| \leq \inf\{|\varphi(x)|, |\varphi(y)|\} < \varepsilon$$

5.4. Existence de recouvrements simples. Un recouvrement (ouvert) $\{U_i, i \in I\}$ de M est *simple* si les intersections finies non vides $\bigcap_{i \in J} U_j$ sont contractiles.

Proposition 5.5. *Pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de M, il existe un atlas de M, dénombrable et dont les domaines des cartes constituent un recouvrement simple subordonné à $\mathcal{U}$.*

Démonstration. Observons qu'un voisinage normal ω par rapport à un point a est contractile puisqu'il est homéomorphe à un ouvert étoilé Ω de T_aM. C'est aussi le domaine d'une carte de M, à savoir

$$(\omega, (\exp_{|\Omega})^{-1})$$

Il est clair également qu'une intersection non vide de voisinages qui sont normaux par rapport à chacun de leur points est également un voisinage normal par rapport à chacun de ses points.

En application de la proposition précédente, pour tout point $a \in M$, il existe un élément U de $\mathcal{U}$ contenant a et un voisinage ω_a de a qui est

[10]Pour simplifier le vocabulaire, nous dirons qu'un ouvert de TM est *radial* si ses intersections avec les espaces tangents sont radiales.

normal par rapport à chacun de ses point et tel que $\omega_a \subset U$. D'après la propriété de Lindelöf, on peut extraire du recouvrement de M par les ω_a un recouvrement dénombrable. Il répond à la question. Il reste donc à s'assurer de l'existence d'un champ rabatteur isochrone de M. C'est fait dans le lemme suivant.

LEMME 5.6. *La variété M possède des champs rabatteurs isochrones.*

DÉMONSTRATION. Considérons un atlas dénombrable

$$\{(U_i, \varphi_i), i \in \mathbb{N}\}$$

de M dont les domaines des cartes consituent un recouvrement localement fini, et une partition de l'unité localement finie α_i subordonnée à ce recouvrement (au sens où supp $\alpha_i \subset U_i$).

Pour chaque i, on peut construire un champ rabatteur isochrone H_i sur $\pi_M^{-1}(U_i)$, par exemple le champ dont l'expression locale dans la carte (U_i, φ_i) est

$$(x, h) \mapsto (x, h, h, 0)$$

Notant un peu abusivement $\alpha_i H_i$ le champ valant précisément $\alpha_i \circ \pi_M H_i$ sur $\pi_M^{-1}(U_i)$ prolongé par 0 hors de cet ouvert, on obtient alors un champ rabatteur isochrone X en posant

$$X = \sum_i \alpha_i H_i$$

CHAPITRE 3

Connexions linéaires

1. Introduction

Il y a plusieurs façons d'introduire la notion de connexion linéaire. Par exemple, on peut soit utiliser les dérivations covariantes soit utiliser des distributions particulières sur le fibré des repères linéaires ou encore sur le fibré tangent.

Dans la perspective de ce texte, le plus simple est sans doute d'adopter l'approche par les distributions sur le fibré tangent. C'est probablement par ce biais que la relation très étroite qui lie les notions d'équation du second ordre isochrone et de connexion linéaire est le plus facilement mise en évidence. Cette approche rend également très naturelles les notions de courbure et de transport parallèle dont elle facilite l'étude.

2. Distributions verticale et horizontales

Ces distributions sont définies sur le fibré tangent. Elles sont supplémentaires en ce sens que leurs valeurs en tout point $\mathbf{h}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $T_{\mathbf{h}}TM$.

La distribution verticale est canonique. Par contre, il n'y a pas de distribution horizontale canonique.

2.1. La distribution verticale. La *distribution verticale* de TM est la distribution

$$\mathcal{V} : \mathbf{h} \mapsto \ker \pi_{M*\mathbf{h}}$$

Les éléments de $\mathcal{V}_{\mathbf{h}}$ sont appelés vecteurs verticaux. Ce sont les vecteurs tangents d'expression locale $(x, h, 0, l)$, où (x, h) est la forme locale de $\mathbf{h}$. En particulier,

LEMME 2.1. *La distribution verticale est stable par homothéties :*

$$\theta_{s*}^{TM}\mathcal{V}_{\mathbf{h}} \subset \mathcal{V}_{s\mathbf{h}}$$

pour tout $s \in \mathbb{R}$ *et tout* $\mathbf{h} \in TM$.

Un champ de vecteurs sur TM est dit *vertical* si ses valeurs sont des vecteurs verticaux.

La distribution verticale est de classe C^∞. Elle est involutive et ses variétés intégrales maximales sont les espaces tangents T_xM.

Relèvements verticaux. Tout $\mathbf{u} \in T_xM$ se relève en un vecteur vertical $\mathbf{u}^v_{\mathbf{h}}$ en chaque point $\mathbf{h}$ de T_xM

$$\mathbf{u}^v_{\mathbf{h}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{h} + t\mathbf{u})_{|t=0}$$

Si (x, h) et (x, u) sont les expressions locales de $\mathbf{h}$ et de $\mathbf{u}$, celle de $\mathbf{u}^v_{\mathbf{h}}$ est $(x, h, 0, u)$. On retrouve facilement $\mathbf{u}$ à partir de $\mathbf{u}^v_{\mathbf{h}}$ car

$$(\mathbf{u}^v_{\mathbf{h}})^\nu(f) = \mathbf{u}^v_{\mathbf{h}}.df = \frac{d}{dt}(\mathbf{h}.f + t\mathbf{u}.f)_{|t=0} = \mathbf{u}.f$$

Toute application $\varsigma : TM \to TM$ vérifiant $\pi_M \circ \varsigma = \pi_M$, permet de construire un champ de vecteurs vertical

$$\varsigma^v : \mathbf{h} \mapsto \varsigma(\mathbf{h})^v_{\mathbf{h}}$$

En coordonnées locales, avec des notations évidentes,

$$\varsigma^v : (x, h) \mapsto (x, h, 0, \varsigma(x, h))$$

Lorsqu'on prend $X \in \mathrm{Vect}(M)$ et qu'on pose $\varsigma = X \circ \pi_M$, cette construction donne le *relèvement vertical* $X^v \in \mathrm{Vect}(TM)$ de X sur TM. Un autre cas intéressant est celui où ς est un champ d'endomorphismes A de M([1]). Un calcul élémentaire permet de vérifier la proposition suivante.

PROPOSITION 2.2. *Pour tous champs de vecteurs X, Y de M et tous champs d'endomorphismes A, B, on a*

$$[X^v, Y^v] = 0, [A^v, X^v] = -(AX)^v, [A^v, B^v] = -[A, B]^v$$

2.2. Distributions horizontales. Une *distribution horizontale* sur TM est une distribution $\mathcal{H}$ de classe C^∞ qui fournit un supplémentaire de $\mathcal{V}_{\mathbf{h}}$ en tout $\mathbf{h} \in TM$:

$$T_{\mathbf{h}}TM = \mathcal{V}_{\mathbf{h}} \oplus \mathcal{H}_{\mathbf{h}} \tag{18}$$

Cette décomposition est caractérisée par deux projecteurs : le *projecteur vertical* $p^v_{\mathbf{h}}$ dont l'image est $\mathcal{V}_{\mathbf{h}}$ et le noyau vaut $\mathcal{H}_{\mathbf{h}}$, et le *projecteur horizontal* $p^h_{\mathbf{h}} = 1 - p^v_{\mathbf{h}}$. Le fait que $\mathcal{H}$ soit de classe C^∞ équivaut au

[1] C'est un champ de tenseurs de type $\binom{1}{1}$. Il associe donc à chaque $x \in M$ une application linéaire A_x de T_xM dans lui-même.

fait que p^v et p^h sont des champs d'endomorphismes de classe C^∞ de TM(2). En coordonnées, ils prennent la forme

$$\begin{cases} p^v : (x,h,k,l) \mapsto (x,h,0,l+\Gamma(x,h)k) \\ p^h : (x,h,k,l) \mapsto (x,h,k,-\Gamma(x,h)k) \end{cases}$$

où Γ est de classe C^∞ en x et h et à valeurs dans $gl(m,\mathbb{R})$.

Relèvements horizontaux. Comme la distribution verticale, une distribution horizontale donne lieu à divers relèvements. Ainsi, toute application $\varsigma : TM \to TM$ vérifiant $\pi_M \circ \varsigma = \pi_M$ permet de construire un champ de vecteurs horizontal(3) ς^h tel que $\pi_{M*} \circ \varsigma^h = \varsigma \circ \pi_M$. En effet, pour tout $\mathbf{h} \in T_xM$, la restriction de π_{M*} à $\mathcal{H}_\mathbf{h}$ étant une bijection linéaire sur T_xM, il existe un seul $\varsigma^h_\mathbf{h} \in \mathcal{H}_\mathbf{h}$ se projetant sur $\varsigma(\mathbf{h})$. En coordonnées locales on a

$$\varsigma^h : (x,h) \mapsto (x,h,\varsigma(x,h),-\Gamma(x,h)\varsigma(x,h))$$

Avec $\varsigma = X \circ \pi_M$, où $X \in \mathrm{Vect}(M)$, cette construction donne le *relèvement horizontal* $X^h \in \mathrm{Vect}(TM)$ de X sur TM. Les champs X^h et X sont π_M-liés mais, à la différence du relèvement complet $X \mapsto X^c$(4), le relèvement horizontal n'est généralement pas un homomorphisme d'algèbres de Lie de $\mathrm{Vect}(M)$ dans $\mathrm{Vect}(TM)$. Nous reviendrons bientôt sur cette question.

Equation d'ordre deux associée et torsion. En prenant pour ς l'identité de TM dans lui-même, nous obtenons *le seul* champ horizontal ς^h de TM qui soit rabatteur. Nous le noterons $X^\mathcal{H}$. En coordonnées locales, il est de la forme

$$X^\mathcal{H}_{(x,h)} = \sum_u h^u \partial_u - \sum_{u,v} \Gamma^u_v(x,h) h^v \overline{\partial}_u$$

Ainsi, à chaque distribution horizontale de TM est associée canoniquement une équation différentielle d'ordre deux qui a la particularité de s'annuler le long de la section nulle de TM. Nous la noterons $F^\mathcal{H}$. Elle ne détermine pas entièrement la distribution car elle fournit les valeurs de $\Gamma(x,h)k$ uniquement lorsque $k = h$. Afin d'appropfondir la question, observons que pour tous $X, Y \in \mathrm{Vect}(M)$, le champ de vecteurs

---

2C'est facile à voir mais le lecteur s'exercera utilement en le vérifiant en détail. De même, il se convaincra que les expressions locales des projecteurs sont bien de la forme spécifiée plus loin.

3C'est-à-dire dont les valeurs appartiennent à la distribution horizontale.

4Pour rappel, le flot de X^c est la différentielle de celui de X.

$[X^h, Y^v] - [Y^h, X^v] - [X, Y]^v$ de TM est vertical car X^h et Y^v sont respectivement π_M-liés à X et à 0. Pour tout $\mathbf{h} \in TM$,

$$T^{\mathcal{H}}(X, Y)(\mathbf{h}) = ([X^h, Y^v]_{\mathbf{h}} - [Y^h, X^v]_{\mathbf{h}} - [X, Y]^v_{\mathbf{h}})^\nu$$

est donc un vecteur tangent à M en $x = \pi_M(\mathbf{h})$. De plus, vu que

$$(fX)^h = (f \circ \pi_M) X^h$$

il est facile de voir que

$$T^{\mathcal{H}}(fX, Y)(\mathbf{h}) = T^{\mathcal{H}}(X, fY)(\mathbf{h}) = fT^{\mathcal{H}}(X, Y)(\mathbf{h})$$

pour tout $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Par conséquent, $T^{\mathcal{H}}(X, Y)(\mathbf{h})$ ne dépend en fait que des valeurs de X et Y au point x. Autrement dit, pour un $\mathbf{h}$ donné, $T^{\mathcal{H}}(X, Y)(\mathbf{h})$ est la valeur en X_x, Y_x d'une application bilinéaire antisymétrique de $T_xM \times T_xM$ dans T_xM([5]). Tout ceci est confirmé par l'expression locale de $T^{\mathcal{H}}$. On vérifie facilement que celle-ci s'écrit

$$T^{\mathcal{H}}(X, Y)(\mathbf{h}) = \sum_{u,v,w} (\overline{\partial}_v \Gamma^w_u - \overline{\partial}_u \Gamma^w_v) X^u Y^v \partial_w \tag{19}$$

On appelle $T^{\mathcal{H}}$ la *torsion* de la distribution horizontale $\mathcal{H}$.

PROPOSITION 2.3. *Toute équation différentielle d'ordre deux F de M qui s'annule le long de la section nulle de TM est associée à une et une seule distribution horizontale $\mathcal{H}$ de TM de torsion nulle.*

DÉMONSTRATION. Dans une carte quelconque (U, φ) de M, l'expression locale de F est de la forme

$$F(x, h) = \sum_{uv} h^u h^v \partial_{uv} + \sum_u f^u(x, h) \partial_u$$

Comme F est nul sur la section nulle de TM, pour tout $h \in \mathbb{R}^m$, la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{t} f(x, th)$$

est de classe C^∞ dans $\mathbb{R}$. Par conséquent,

$$A(x, h) = \int_0^1 f(x, th) \frac{dt}{t}$$

est de classe C^∞ dans $\varphi(U) \times \mathbb{R}^m$. De plus

$$\sum_u h^u \overline{\partial}_u A = \int_0^1 h^u \overline{\partial}_u f(x, th) dt = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x, th) dt = f(x, h)$$

---

[5] On dit aussi un tenseur de type $\binom{1}{2}$, antisymétrique.

Ceci montre que, dans TU, l'équation F est associée à la distribution horizontale définie par le projecteur horizontal

$$(x,h,k,l) \mapsto (x,h,k,\sum_u \overline{\partial}_u A(x,h)k^u)$$

dont la torsion est évidemment nulle.

Avant de conclure à l'existence globale d'une distribution de torsion nulle à laquelle F soit associé, vérifions l'unicité *a priori* d'une telle distribution. Soient des distributions définies par des projecteurs horizontaux p_i^h, $i = 1,2$ auxquelles F soit associé. Dans une carte arbitraire de M, la différence $\gamma = \Gamma_2 - \Gamma_1$ vérifie

$$\sum_u \gamma_u(x,h)h^u = 0 \text{ et } \overline{\partial}_u\gamma_v = \overline{\partial}_v\gamma_u$$

De là,

$$(\sum_u h^u\overline{\partial}_u)\gamma_v + \gamma_v = \sum_u h^u\overline{\partial}_v\gamma_u + \gamma_v = \overline{\partial}_v(\sum_u \gamma_u h^u) = 0$$

Par conséquent, $\gamma = 0$ car les valeurs propres de l'application

$$\sum_u h^u\overline{\partial}_u : C^\infty(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$$

sont les entiers positifs ou nuls. D'où l'unicité.

La preuve de l'existence de la distribution horizontale cherchée est à présent immédiate : vu l'unicité, les distributions horizontales construites en début de démonstration au-dessus de chaque domaine de carte U de M doivent coïncider au-dessus des intersections de ceux-ci. D'où la conclusion.

Intégrabilité et courbure. D'après le théorème de Frobenius, comme une distribution horizontale $\mathcal{H}$ est de rang constant, elle est intégrable si et seulement si elle est involutive. Nous allons examiner cette condition de plus près. D'abord un lemme.

LEMME 2.4. *Soit un ouvert U de M en tout point x duquel des champs de vecteurs $X_1,...,X_p \in \mathrm{Vect}(U)$ engendrent T_xM. Les champs $X_1^h,...,X_p^h$ engendrent $\mathcal{H}_{\mathbf{h}}$ en tout $\mathbf{h} \in TU$.*

DÉMONSTRATION. Soit $H \in \mathcal{H}_{\mathbf{h}}$, où $\mathbf{h} \in TU$. Il existe des nombres c_i tels que

$$\pi_{M*}H = \sum_{i=1}^p c_iX_i(x)$$

où $x = \pi_M(\mathbf{h})$. Les vecteurs horizontaux H et $\sum_i c_iX_i^h(\mathbf{h})$ ont même projection. Ils sont donc égaux. D'où le lemme.

Il est donc intéressant de regarder de plus près les crochets de Lie des relèvement horizontaux des champs de vecteurs. Soient $X, Y \in \mathrm{Vect}(M)$([6]). Le champ $[X,Y]^h - [X^h, Y^h]$ est vertical puisque X^h et Y^h sont respectivement π_M-liés à X et Y. Pour tout $\mathbf{h} \in TM$,

$$R^{\mathcal{H}}(X,Y)(\mathbf{h}) = ([X,Y]^h_{\mathbf{h}} - [X^h, Y^h]_{\mathbf{h}})^\nu$$

est donc un vecteur tangent à M en $x = \pi_M(\mathbf{h})$. En procédant comme plus haut avec la torsion, on voit que, pour un $\mathbf{h}$ donné, $R^{\mathcal{H}}(X,Y)(\mathbf{h})$ est la valeur en X_x, Y_x d'une application bilinéaire antisymétrique de $T_xM \times T_xM$ dans T_xM. L'expression locale de $R^{\mathcal{H}}$ s'écrit d'ailleurs

$$(20) \qquad \sum_{u,v,w} (\partial_u \Gamma^w_v - \partial_v \Gamma^w_u - \sum_r (\Gamma^r_u \overline{\partial}_r \Gamma^w_v - \Gamma^r_v \overline{\partial}_r \Gamma_u)) X^u Y^v \partial_w$$

comme on le voit avec un peu de calcul. On appelle $R^{\mathcal{H}}$ la *courbure* de la distribution horizontale $\mathcal{H}$.

Proposition 2.5. *Une distribution horizontale est involutive si et seulement si sa courbure est nulle.*

Démonstration. Si la distribution est involutive, alors pour tous $X, Y \in \mathrm{Vect}(M)$, $[X,Y]^h - [X^h, Y^h]$ est à la fois horizontal et vertical. Par conséquent, il est nul, de même que la courbure de la distribution. Réciproquement, si la courbure est nulle, alors, pour tout ouvert U de M et tous $X, Y \in \mathrm{Vect}(U)$, le champ vertical $[X,Y]^h - [X^h, Y^h]$ est nul, vu la Proposition 6.2. Par conséquent $[X^h, Y^h]$ est horizontal. La distribution horizontale est donc involutive, vu le Lemme 2.4.

3. Connexions linéaires

Une *connexion linéaire* de M est une distribution horizontale $\mathcal{H}$ stable par homothéties, c'est-à-dire telle que

$$\theta^{TM}_{s*} \mathcal{H}_{\mathbf{h}} \subset \mathcal{H}_{s\mathbf{h}}$$

pour tout $s \in \mathbb{R}$ et tout $\mathbf{h} \in TM$. En coordonnées locales, cette condition stipule que les applications $h \mapsto \Gamma(x,h)$ commutent avec la multiplication par tout nombre réel s. Elle signifie donc que ces applications sont linéaires. Il existe ainsi des fonctions Γ^w_{uv} de x telles que

$$\Gamma(x,h)k = \sum_{u,v,w} \Gamma^w_{uv}(x) h^v k^u$$

Ce sont les *symboles de Christoffel* de la connexion linéaire. Examinons les premières conséquences de cette linéarité([7]).

[6]Tout ce qui suit vaut pour des champs de vecteurs locaux à condition de se restreindre à un ouvert U de M dans lequel ils sont définis.

[7]Dans ce qui suit, $\mathcal{H}$ désigne une connexion linéaire.

Le tenseur de courbure. La fonction $\mathbf{h} \mapsto R^{\mathcal{H}}(Y,Y)(\mathbf{h})$ est linéaire. Par conséquent, $R^{\mathcal{H}}$ est un champ de tenseurs de type $\binom{1}{3}$ de M. C'est le *tenseur de courbure* de la connexion $\mathcal{H}$. En coordonnées locales, ses composantes sont les fonctions (cf. (20))

$$R^t_{uvw} = \partial_u \Gamma^t_{vw} - \partial_v \Gamma^t_{uw} + \sum_s (\Gamma^t_{us}\Gamma^s_{vw} - \Gamma^t_{vs}\Gamma^s_{uw}) \tag{21}$$

Le champ géodésique. Le champ rabatteur $X^{\mathcal{H}}$ est isochrone. En effet, puisque $\mathcal{H}$ est stable par homothéties, $s\theta^{TM}_{s*} X^{\mathcal{H}}_{\mathbf{h}}$ est horizontal. Comme il se projette sur $s\mathbf{h}$, il coïncide nécessairement avec $X^{\mathcal{H}}_{s\mathbf{h}}$. On appelle alors $X^{\mathcal{H}}$ le *champ géodésique* de $\mathcal{H}$. Ses trajectoires en sont les *géodésiques*. En coordonnées locales, ce sont les solutions du système d'équations

$$\ddot{x}^w + \sum_{u,v} \Gamma^w_{uv} \dot{x}^u \dot{x}^v = 0 \tag{22}$$

Le tenseur de torsion. Comme on le voit sur cette équation, le champ $X^{\mathcal{H}}$, ou de façon équivalente, l'équation $F^{\mathcal{H}}$, détermine la partie symétrique

$$\frac{1}{2}(\Gamma^w_{uv} + \Gamma^w_{vu})$$

des symboles de Christoffel. Leur partie antisymétrique est donnée par la torsion de la connexion. En effet, comme avec la courbure, celle-ci définit un champ de tenseurs, de type $\binom{1}{2}$ cette fois, car $T^{\mathcal{H}}(X,Y)(\mathbf{h})$ ne dépend pas de $\mathbf{h}$ mais seulement des valeurs de X et Y en $x = \pi_M(\mathbf{h})$. C'est le *tenseur de torsion* de $\mathcal{H}$. D'après (19), ses composantes valent

$$T^w_{uv} = \Gamma^w_{uv} - \Gamma^w_{vu}$$

Pour les connexions linéaires, l'analogue de la Proposition 2.3 s'énonce donc comme suit.

PROPOSITION 3.1. *La correspondance $\mathcal{H} \mapsto F^{\mathcal{H}}$ établit une bijection entre l'ensemble des connexions linéaires de torsion nulle de M et ses équations d'ordre deux isochrones.*

4. Le transport parallèle

Dans cette section, $\mathcal{H}$ désigne une connexion linéaire de M.

Une courbe (I,α) de TM est *horizontale* si elle est tangente à $\mathcal{H}$, c'est-à-dire si

$$\forall t \in I,\ \dot{\alpha}(t) \in \mathcal{H}_{\alpha(t)}$$

On dit alors que α est un *relèvement horizontal* de la courbe $(I, \pi_M \circ \alpha)$ de M.

LEMME 4.1. *Soit une courbe* (I, γ) *de* M, $s \in I$ *et* $\mathbf{h} \in T_{\gamma(s)}M$. *Il existe un et un seul relèvement horizontal* (I, α) *de* (I, γ) *tel que* $\alpha(s) = \mathbf{h}$.

DÉMONSTRATION. La preuve de ce lemme suit une démarche assez classique. Nous ne la détaillerons pas complètement.

En premier lieu, on vérifie que pour tout $r_0 \in I$, il existe un intervalle $J_0 \subset I$ contenant r_0 tel que, pour tout $\mathbf{k} \in T_{\gamma(r)}M$, $r \in J_0$, (J_0, γ) admet un unique relèvement horizontal passant par $\mathbf{k}$ en $t = r$. Cela résulte directement des propriétés d'existence et d'unicité des solutions des systèmes d'équations différentielles ordinaires linéaires([8]). En effet, en coordonnées locales, une courbe d'expression locale $t \mapsto (x(t), h(t))$ de TM est un relèvement horizontal d'une courbe d'expression locale $t \mapsto x(t)$ si et seulement si

$$\dot{h}^w(t) + \sum_{u,v} \Gamma^w_{uv}(x(t))\dot{x}^u(t)h^v(t) = 0 \tag{23}$$

pour $w \in \{1, ..., m\}$.

Cela acquis, on vérifie que des relèvements horizontaux qui coïncident en un point de l'intersection de leurs intervalles de définition coïncident dans cette intersection. De ce fait, ils se prolongent mutuellement dans l'union de ces intervalles. Ceci permet d'établir l'existence et l'unicité d'un relèvement horizontal maximal (J, α) passant par $\mathbf{h}$ en $t = s$.

Il reste à voir que $J = I$. On procède par l'absurde. Par exemple, si $r_0 = \sup J \in I$, alors il existe un intervalle $J_0 \subset I$ contenant r_0 ayant les propriétés indiquées en début de preuve. Soit $r \in J \cap J_0$. Le relèvement de (J_0, γ) qui passe par $\alpha(r)$ en $t = r$ prolonge α dans $J \cup J_0$. D'où une contradictiton.

PROPOSITION 4.2. *Soit*

$$t \mapsto \tau_{t,s}(\mathbf{h})$$

le relèvement horizontal d'une courbe (I, γ) *de* M, *passant par* $\mathbf{h} \in T_{\gamma(s)}M$ *en* $t = s$. *Pour tout* $t, s \in I$,

$$\tau_{t,s} : T_{\gamma(s)}M \to T_{\gamma(t)}M \tag{24}$$

est une bijection linéaire et

$$\tau_{t,s} \circ \tau_{s,r} = \tau_{t,r}$$

[8] La linéarité est importante. Elle permet d'avoir le même intervalle J_0 pour chaque r, ce qui ne serait pas le cas en général.

pour tous $r, s, t \in I$. *De plus,* $\tau_{t,s}$ *est de classe* C^∞ *en* (t, s) *dans* $I \times I$ *en ce sens que les expressions locales des applications linéaires* (27) *sont des matrices de classe* C^∞ *en* (t, s).

Démonstration. On a

$$\tau_{t,s} \circ \tau_{s,r} = \tau_{t,r}$$

pour tous $r, s, t \in I$. En effet, pour tout $\mathbf{k} \in T_{\gamma(r)}M$,

$$t \mapsto \tau_{t,s}(\tau_{s,r}(\mathbf{k}))$$

est un relèvement horizontal de (I, γ) qui passe par $\tau_{s,r}(\mathbf{k})$ en $t = s$. C'est donc nécessairement l'application $t \mapsto \tau_{t,r}(\mathbf{k})$.

En particulier, puisque $\tau_{t,t}$ est l'identité pour tout t, les $\tau_{t,s}$ sont des bijections et

$$\tau_{t,s}^{-1} = \tau_{s,t}$$

Soient alors $t_0, s_0 \in I$ tels que, par exemple, $t_0 \leq s_0$. Pour vérifier que $\tau_{t,s}$ est de classe C^∞ au voisinage de (t_0, s_0) et qu'il est linéaire, nous allons choisir $r_0 = t_0 \leq r_1 \leq \cdots \leq r_p = s_0$ de telle sorte que chaque $\gamma([r_i, r_{i+1}])$, $i = 0, ..., p-1$, soit contenu dans le domaine d'une carte de M.

Pour $s \in I_i = [r_i, r_{i+1}]$ et $\mathbf{h} \in T_{\gamma(s)}M$, l'expression locale dans la carte correspondante de $t \in I_i \mapsto \tau_{t,s}(\mathbf{h})$ est solution d'un système d'équations différentielles linéaires analogues à (23). Le fait que $\tau_{t,s}$ soit linéaire et différentiable en (t, s) dans $I_i \times I_i$ résulte alors aisément des propriétés des solutions d'un tel système. Pour $t \in I_0$ et $s \in I_{p-1}$, la décomposition

$$\tau_{t,s} = \tau_{t,r_0} \circ \tau_{r_0,r_1} \circ \cdots \circ \tau_{r_{p-2},r_{p-1}} \circ \tau_{r_{p-1},s}$$

permet alors de conclure.

Par définition, l'application linéaire $\tau_{t,s}$ de la Proposition 4.2 est le *transport parallèle* le long de (I, γ) de $\gamma(s)$ à $\gamma(t)$.

Proposition 4.3. *Soient* $X \in \mathrm{Vect}(M)$ *et* $x \in M$. *Notons* $(I_x, t \mapsto \varphi_t(x))$ *la courbe intégrale maximale* X *passant par* x *en* $t = 0$. *Pour tout* $\mathbf{h} \in T_xM$, *la courbe intégrale maximale de* X^h *passant par* $\mathbf{h}$ *en* $t = 0$ *est le relèvement horizontal* $(I_x, t \mapsto \tau_t(\mathbf{h}))$ *de* $(I_x, \varphi(x))$. *En particulier, le transport parallèle le long de* $(I_x, \varphi(x))$ *de* $\varphi_s(x)$ *à* $\varphi_t(x)$ *est* τ_{t-s}.

Démonstration. Comme les champs X^h et X sont π_M-liés, l'intervalle de définition J de la courbe intégrale maximale de X^h passant par $\mathbf{h}$ en $t = 0$ est inclus à I_x. D'un autre côté, pour tout $t \in I_x$,

$$\pi_{M*} \frac{d}{dt} \tau_t(\mathbf{h}) = \frac{d}{dt} \varphi_t(x) = X_{\pi_M(\tau_t(\mathbf{h}))}$$

Comme en outre, $d\tau_t(\mathbf{h})/dt$ est horizontal, il coïncide avec $X^h(\tau_t(\mathbf{h}))$. Par conséquent, $J = I_x$ et $(I_x, \tau(\mathbf{h}))$ est bien la courbe intégrale maximale de X^h passant par $\mathbf{h}$ en $t = 0$. En particulier, τ_t est le transport parallèle le long de $(I_x, \varphi(x))$ de $x = \varphi_0(x)$ à $\varphi_t(x)$. Le transport parallèle de $\varphi_s(x)$ à $\varphi_t(x)$ est alors

$$\tau_t \circ \tau_s^{-1} = \tau_{t-s}$$

vu la Proposition 4.2. D'où la proposition.

Les géodésiques de M sont les courbes (I, γ) pour lesquelles $(I, \dot{\gamma})$ est horizontal. On dit encore qu'elles sont les courbes auto-parallèles de M puisque leur vecteur tangent se transporte parallèlement à lui-même tout le long de la courbe.

5. Dérivation covariante

Une *dérivation covariante* de M est une application bilinéaire

$$\nabla : \mathrm{Vect}(M) \times \mathrm{Vect}(M) \to \mathrm{Vect}(M)$$

telle que

$$\begin{cases} \nabla_{fX} Y & = & f \nabla_X Y \\ \nabla_X (fY) & = & (X.f) Y + f \nabla_X Y \end{cases}$$

pour tous $X, Y \in \mathrm{Vect}(M)$ et tout $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Soit une connexion linéaire $\mathcal{H}$ de M. Pour tous $X, Y \in \mathrm{Vect}(M)$, le champs de vecteurs $[X^h, Y^v]$ de TM est vertical (X^h et Y^v sont π_M-liés à X et à 0). Dailleurs son expression locale est

$$[X^h, Y^v] = \sum_w (\sum_u X^u \partial_u Y^w + \sum_{u,v} \Gamma^w_{uv} X^u Y^v) \overline{\partial}_w$$

Ceci permet de voir facilement que l'application

$$\nabla^{\mathcal{H}} : (X, Y) \in \mathrm{Vect}(M) \times \mathrm{Vect}(M) \mapsto [X^h, Y^v]^\nu \in \mathrm{Vect}(M)$$

est une dérivation covariante de M.

PROPOSITION 5.1. *La correspondance $\mathcal{H} \mapsto \nabla^{\mathcal{H}}$ est une bijection entre l'ensemble des connexions linéaires de M et celui de ses dérivations covariantes.*

DÉMONSTRATION. Il est clair que cette correspondance est injective. Montrons qu'elle est surjective. Soit une dérivation covariante ∇ de M. D'après des lemmes établis plus bas, ∇ est une application locale et dans toute carte (U, φ) de M, les composantes de son expression locale sont de la forme

$$(\nabla_X Y)^w = \sum_u X^u \partial Y^w + \sum_{u,v} A^w_{uv} X^u Y^v$$

où les fonctions A_{uv}^w sont de classe C^∞ dans $\varphi(U)$. Il existe donc une connexion linéaire $\mathcal{H}_U$ au-dessus de U telle que $\nabla_{|U} = \nabla^{\mathcal{H}_U}$. Vu l'injectivité de la correpondance étudiée, les $\mathcal{H}_U$ se prolongent mutuellement pour définir une connexion linéaire $\mathcal{H}$ telle que $\nabla = \nabla^{\mathcal{H}}$.

La torsion et la courbure d'une connexion linéaire $\mathcal{H}$ s'expriment facilement à l'aide de la seule dérivation covariante associée $\nabla^{\mathcal{H}}$. On a en effet

$$\begin{aligned} T^{\mathcal{H}}(X,Y) &= \nabla^{\mathcal{H}}_X Y - \nabla^{\mathcal{H}}_Y X - [X,Y] \\ R^{\mathcal{H}}(X,Y)(Z) &= \nabla^{\mathcal{H}}_X \nabla^{\mathcal{H}}_Y Z - \nabla^{\mathcal{H}}_Y \nabla^{\mathcal{H}}_X Z - \nabla^{\mathcal{H}}_{[X,Y]} Z \end{aligned}$$

pour tous $X, Y, Z \in \mathrm{Vect}(M)$. Cela résulte facilement des définitions de $T^{\mathcal{H}}$ et $R^{\mathcal{H}}$ et de la Proposition 2.2.

La notion de dérivation covariante est parfois étudiée sans référence à la connexion linéaire à laquelle elle est associée([9]). Les champs de tenseurs définis par les formules ci-dessus s'appellent alors la torsion et la courbure de la dérivation covariante.

Corollaire 5.2. *L'ensemble des équations d'ordre deux isochrones de M est canoniquement en correspondance biunivoque avec l'ensemble de ses dérivations covariantes de torsion nulle. En particulier, c'est un espace affine modelé sur l'espace des champs de tenseurs de type* $\binom{1}{2}$ *de M qui sont symétriques en leurs composantes covariantes.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des Proposition 3.1 et 5.1.

Proposition 5.3. *Soient φ le flot de $X \in \mathrm{Vect}(M)$ et τ celui de X^h. Pour tout $Y \in \mathrm{Vect}(M)$ et tout $x \in M$, on a*

$$(\nabla_X Y)_x = \frac{d}{dt}\tau_{-t}(Y_{\varphi_t(x)})_{|t=0}$$

Démonstration. On a en effet

$$[X^h, Y^v]^\nu_{\mathbf{h}}.f = \frac{d}{dt}(\tau_{-t*}(Y^v_{\tau_t(\mathbf{h})}).df)_{|t=0}$$

pour tout $\mathbf{h} \in T_xM$. Mais

$$\begin{aligned} \tau_{-t*}(Y^v_{\tau_t(\mathbf{h})}).df &= \frac{d}{ds}df(\tau_{-t}(\tau_t(\mathbf{h}) + sY_{\varphi_t(x)})_{|s=0} \\ &= \frac{d}{ds}df(\mathbf{h} + s\tau_{-t}(Y_{\varphi_t(x)}))_{|s=0} \\ &= \tau_{-t}(Y_{\varphi_t(x)}).f \end{aligned}$$

[9]Il arrive que les termes *connexion linéaire* et *dérivation covariante* soient considérés comme synonymes.

pour tout $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. D'où la formule annoncée.

Localité et expression locale des dérivations covariantes. Vue comme application bilinéaire, une dérivation covariante est *locale*([10]). Cela signifie que si $X = X'$ dans un ouvert U, ou si $Y = Y'$ dans U, alors $\nabla_X Y = \nabla_{X'} Y$, ou $\nabla_X Y = \nabla_X Y'$, dans U([11]). Cela permet de définir une dérivation covariante de U, la *restriction* $\nabla_{|U}$ de ∇ à U, comme suit. Soient $X, Y \in \mathrm{Vect}(U)$. On définit $(\nabla_{|U})_X Y$ point par point. Pour $x \in U$, on choisit dans $V(M)$ des champs de vecteurs X' et Y' qui coïncident respectivement avec X et Y dans un voisinage de x inclus à U. On pose alors

$$((\nabla_{|U})_X Y)(x) = (\nabla_{X'} Y')(x)$$

La localité de ∇ permet de vérifier que le membre de droite de cette égalité ne dépend que de X, Y et de x et non des prolongements X' et Y' choisis. De plus, on voit facilement que $\nabla_{|U}$ est bien une dérivation covariante.

LEMME 5.4. *Les dérivations covariantes sont locales.*

DÉMONSTRATION. Supposons que $Y \in \mathrm{Vect}(M)$ s'annule dans un ouvert U de M. Soient $x \in U$ et une fonction α de classe C^∞ dans M tout entier, à support dans U et égale à 1 en x. On a $(1-\alpha)Y = Y$. Par conséquent,

$$(\nabla_X Y)(x) = (X.(1-\alpha))(x)\underbrace{Y(x)}_{=0} + \underbrace{(1-\alpha(x))}_{=0}(\nabla_X Y)(x) = 0$$

On procède de façon semblable pour montrer que $\nabla_X Y$ est nul dans U si X l'est. D'où le lemme.

LEMME 5.5. *Soit une carte (U, φ) de M. Il existe des fonctions A^w_{uv} de classe C^∞ dans $\varphi(U)$ telles que si les expressions locales de X et Y sont*

$$X = \sum_u X^u \partial_u, \ \textit{et } Y = \sum_u Y^u \partial_u$$

alors celle de $\nabla_X Y$ est

$$\nabla_X Y = \sum_w \Big(\sum_u X^u \partial Y^w + \sum_{u,v} A^w_{uv} X^u Y^v\Big)\partial_w$$

[10]C'est démontré quelques lignes plus bas.

[11]Par bilinéarité, quitte à remplacer X par $X - X'$ ou Y par $Y - Y'$ selon les cas, cela revient à supposer que si un argument de ∇ est nul dans U, ∇ l'est aussi.

Démonstration. Cela résulte immédiatement des propriétés des dérivations covariantes et de

$$(\nabla_X Y)_{|U} = (\nabla_{|U})_{(X|U)}(Y|U)$$

La fonction A^w_{uv} est la composante selon ∂_w de $\nabla_{\partial_u}\partial_v$.

Puisque les A^w_{uv} sont les symboles de Christoffel de la connexion linéaire à laquelle ∇ est associé, nous les appellerons aussi les symboles de Christoffel de ∇.

5.1. La dérivation covariante de Levi-Civita. Considérons une structure riemannienne g sur la variété M([12]). Soit aussi une dérivation covariante ∇ de M. Par définition, la *dérivée covariante* $\nabla_X g$ de g est donnée par

$$(\nabla_X g)(Y,Z) = X.g(Y,Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) \tag{25}$$

pour tout $X, Y, Z \in \mathrm{Vect}(M)$. Autrement dit, en convenant de poser $\nabla_X f = X.f$ pour tout $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, on prolonge ∇_X aux champ de tenseurs de M par une dérivation de l'algèbre des tenseurs.

Proposition 5.6. *Pour tout $X \in \mathrm{Vect}(M)$, $\nabla_X g$ est un champ de tenseurs symétriques de type $\binom{0}{2}$ de M. Dans toute carte de M, ses composantes sont*

$$\sum_w X^w(\partial_w g_{uv} - \sum_t (g_{ut}\Gamma^t_{wv} + g_{vt}\Gamma^t_{wu}))$$

où g_{uv} sont celles de g.

Démonstration. Cela se voit immédiatement en développant le membre de droite de (25). On note ∇g l'application $X \mapsto \nabla_X g$([13]).

Proposition 5.7. *Pour toute structure riemannienne g de M, il existe une unique dérivation covariante ∇ dont la torsion soit nulle et pour laquelle $\nabla g = 0$.*

Démonstration. En coordonnées locales, nous devons montrer l'existence et l'unicité de fonction Γ^w_{uv} dépendant symétriquement de u et v et vérifiant les équations

$$\sum_t (g_{ut}\Gamma^t_{wv} + g_{vt}\Gamma^t_{wu}) = \partial_w g_{uv}$$

---

[12]Pour rappel, c'est un champ de tenseurs symétriques de type $\binom{0}{2}$ dont la restriction à chaque espace tangent est un produit scalaire de cet espace.

[13]En fait, on peut même définir $\nabla_{\mathbf{h}} g$ pour tout $\mathbf{h} \in TM$. Cela se voit sur les composantes de $\nabla_X g$. Le résultat est un champ de tenseurs de type $\binom{0}{3}$.

($u, v, w \in \{1, ..., m\}$). En permutant circulairement les indices u, v, w, et en additionnant membres à membres les trois relations obtenues, il vient, compte tenu de la symétrie des Γ en les indices inférieurs,

$$\sum_t (g_{ut}\Gamma^t_{vw} + g_{vt}\Gamma^t_{wu} + g_{wt}\Gamma^t_{uv}) = \frac{1}{2}(\partial_w g_{uv} + \partial_u g_{vw} + \partial_v g_{wu})$$

D'où

$$\sum_t g_{wt}\Gamma^t_{uv} = \frac{1}{2}(\partial_u g_{vw} + \partial_v g_{uw} - \partial_w g_{uv}) \tag{26}$$

Comme le déterminant de la matrice (g_{ij}) des composantes de g est non nul, l'existence et l'unicité des Γ est donc assurée.

Ainsi, pour tout domaine U de carte de M, il existe une seule dérivation covariante ∇^U de U telle que $\nabla^U g_{|U} = 0$. Vu l'unicité, les ∇^U se recollent et donnent une dérivation covariante ∇ répondant à la question. Et c'est la seule car toute dérivation covariante répondant à la question doit localement coïncider avec les ∇^U.

L'unique dérivation covariante ∇ de torsion nulle pour laquelle $\nabla g = 0$ est la *dérivation covariante de Levi-Civita de* (M, g). Elle est associée à une connexion linéaire de M que nous appellerons *connexion de Levi-Civita de* (M, g).

Proposition 5.8. *Soit*

$$t \mapsto \tau_{t,s}$$

le transport parallèle le long d'une courbe (I, γ) *de* M, *de* $\gamma(s)$ *à* $\gamma(t)$, *relatif à la connexion de Levi-Civita de* (M, g). *Pour tout* $t, s \in I$,

$$\tau_{t,s} : (T_{\gamma(s)}M, g_{\gamma(s)}) \to (T_{\gamma(t)}M, g_{\gamma(t)}) \tag{27}$$

est une isométrie.

Démonstration. Quitte à décomposer $\tau_{t,s}$ comme dans la preuve de la Proposition 4.2, on on peut supposer que $\gamma(I)$ est inclus au domaine d'une carte de M. Notant $t \to x(t)$ l'expression locale de (I, γ) dans cette carte, nous sommes finalement ramenés à montrer que, pour toutes solutions h_1 et h_2 des équations (23),

$$e : t \mapsto \sum_{u,v} g_{uv}(x(t))h_1^u(t)h_2^v(t)$$

est constant dans I. On a, en simplifiant de manière évidente les notations,

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \sum_{u,v,w} \partial_w g_{uv} h_1^u h_2^v \dot{x}^w + \sum_{u,v} g_{uv}(\dot{h}_1^u h_2^v + h_1^u \dot{h}_2^v) \\ &= \sum_{u,v,w} \big(\partial_w g_{uv} - g_{uz}\Gamma_{vw}^z - g_{vz}\Gamma_{uw}^z\big) h_1^u h_2^v \dot{x}^w\end{aligned}$$

On en déduit aussitôt que $\dot{e} = 0$, à cause de l'expression (26) des symboles de Christoffel. D'où le résultat.

5.2. Le cas des variétés plongées dans $\mathbb{R}^m$. Supposons que M soit une hypersurface plongée dans $\mathbb{R}^{m+1}$([14]). L'espace tangent en tout point a de M s'identifie à un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{m+1}$ et le produit scalaire canonique de ce dernier induit un produit scalaire g_a sur ce sous-espace vectoriel. On obtient ainsi une structure riemannienne de M que, traditionnellement, on appelle *la première forme fondamentale* de l'hypersurface.

Si $\psi : \Omega \to U$ est un paramétrage d'un ouvert U de M, alors $(U, \varphi = \psi^{-1})$ est une carte de M et, dans celle-ci, les composantes de g sont les fonctions

$$g_{uv} = \partial_u\psi . \partial_v\psi$$

où le point "." dénote le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^{m+1}$. L'hypersurface est orientée dans U grâce à une normale unitaire N, par exemple

$$N = \frac{\partial_1\psi \wedge \cdots \wedge \partial_m\psi}{|\partial_1\psi \wedge \cdots \wedge \partial_m\psi|}$$

Rappelons que l'on a alors les *équations de structure*

$$\partial_{uv}\psi = \sum_w \Gamma_{uv}^w \partial_w\psi + \varpi_{uv} N$$

où ϖ est la seconde forme fondamentale de M et où *les* Γ *sont les solutions des équations* (26). Autrement dit, *ce sont les symboles de Christoffel de la dérivation covariante de Levi-Civita de* (M, g).

Souvent, les géodésiques de l'hypersurface M sont définies comme étant les courbes (I, γ) de M dont l'accélération $\ddot{\gamma}$ est normale à M. Si $\gamma(I) \subset U$, alors $\gamma = \psi \circ \xi$ où ξ est une courbe de Ω. On a alors

$$\ddot{\gamma} = \sum_{uv} \partial_{uv}\psi \dot{\xi}^u \dot{\xi}^v + \sum_u \ddot{\xi}^u \partial_u\psi$$

[14]Ce qui suit s'adapte facilement aux variétés plongées de $\mathbb{R}^m$ de dimension quelconque. C'est pour simplifier les écritures que nous nous limitons aux hypersurfaces.

Les équations de structures montrent dès lors que (I, γ) est une géodésique si et seulement si

$$\ddot{\xi}^w + \sum_{u,v} \Gamma^w_{uv} \dot{\xi}^u \dot{\xi}^v = 0$$

pour tout w (dans cette relation, les Γ sont calculés en ξ). En rapprochant ces équations de (22), on voit de la sorte que *les géodésiques de la connexion de Levi-Civita de (M, g) sont les courbes de M dont l'accélération est partout normale à M*. Autrement dit, la notion classique de géodésique d'une hypersurface est un cas particulier de la notion de géodésique d'une connexion linéaire.

Il est intéressant d'interpréter le transport parallèle de la connexion de Levi-Civita.

Proposition 5.9. *Une courbe $(I, \mathbf{h})$ de $\mathbb{R}^{m+1}$ telle que*

$$\mathbf{h}(t) \in T_{\gamma(t)}M$$

pour tout $t \in I$ est un relèvement horizontal de la courbe (I, γ) de M pour la connexion de Levi-Civita si et seulement si, pour tout $t \in I$,

$$\dot{\mathbf{h}}(t) \in T_{\gamma(t)}M^{\perp}$$

Démonstration. Soient $t_0 \in I$ et un paramétrage $\psi : \Omega \to U$ d'un voisinage de $\gamma(t_0)$. Il existe un intervalle $J \subset \mathbb{R}$ contenant t_0 est des courbes (J, ξ) de Ω et (J, h) de $\mathbb{R}^m$ telles que $\gamma_{|J} = \psi \circ \xi$ et

$$\mathbf{h}(t) = \sum_u h^u(t) \partial_u \psi$$

pour tout $t \in J$ (la dérivée partielle de ψ est calculée en $\xi(t)$). D'après (23), $(J, \mathbf{h})$ est horizontal si et seulement si (J, h) est solution des équations

$$\dot{h}^w + \sum_{u,v} \Gamma^w_{uv} \dot{\xi}^u h^v = 0$$

$(w = 1, 2, ..., m)$. Or, il résulte des équations de structure que

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{h}} &= \sum_w \dot{h}^w \partial_w \psi + \sum_{u,v} h^v \dot{\xi}^u \partial_{uv} \psi \\ &= \sum_w \dot{h}^w \partial_w \psi + \sum_{u,v,w} \Gamma^w_{uv} \dot{\xi}^u h^v \partial_w \psi + \sum_{u,v} \varpi_{uv} \dot{\xi}^u h^v N \end{aligned}$$

Par conséquent, (J, h) est horizontal si et seulement si

$$\dot{\mathbf{h}} = \varpi(\dot{\gamma}, \mathbf{h}) N_\gamma \tag{28}$$

et la conclusion s'ensuit aisément.

Notons que si l'hypersurface est globalement orientée par une normale unitaire N, alors l'équation (28) du transport parallèle est valable dans I tout entier. De même, l'équation des géodésiques s'écrit intrinsèquement sous la forme

$$\ddot{\gamma} = \varpi(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) N_\gamma$$

Une façon de paraphraser l'équation du transport parallèle (28) consiste à dire que $(I, \mathbf{h})$ est horizontal si la composante tangentielle de sa dérivée est nulle. Avec cette équation, il est particulièrement facile de vérifier dans le présent contexte que le transport parallèle est une isométrie : si $\mathbf{h}, \mathbf{k}$ sont deux relèvements horizontaux de (I, γ), alors

$$(\mathbf{h}.\mathbf{k})^{\cdot} = \dot{\mathbf{h}}.\mathbf{k} + \mathbf{h}.\dot{\mathbf{k}} = \varpi(\dot{\gamma}, \mathbf{h}) N_\gamma.\mathbf{k} + \varpi(\dot{\gamma}, \mathbf{k})\mathbf{h}.N_\gamma = 0$$

et le produit scalaire $\mathbf{h}.\mathbf{k}$ est donc bien constant dans I.

5.3. Le cas des groupes de Lie. Nous avons vu, dans la sous-section 4.2, que l'exponentielle des groupes de Lie est l'exponentielle d'une équation d'ordre deux isochrone. Nous allons construire ici une connexion linéaire dont c'est le champ géodésique et déterminer sa dérivation covariante. Nous reprenons les notations de la section 4.

En vertu de la Proposition 4.1, la distribution verticale de TG est donnée par

$$\mathcal{V}_{\mathbf{h}} = \tau^{-1}\big\{(g, u, 0, w) | w \in \mathfrak{g}\big\}$$

où $(g, u) = \psi_G(\mathbf{h})$. Nous définissons alors $\mathcal{H}$ en posant

$$\mathcal{H}_{\mathbf{h}} = \tau^{-1}\big\{(g, u, v, 0) | v \in \mathfrak{g}\big\}$$

C'est un supplémentaire de $\mathcal{V}_{\mathbf{h}}$. De plus, la Proposition 4.2 montre que

$$\theta_{s*}^{TG} \mathcal{H}_{\mathbf{h}} \subset \mathcal{H}_{s\mathbf{h}}$$

La distribution $\mathcal{H}$ est donc bien une connexion linéaire de G.

Proposition 5.10. *Pour tout* $\mathbf{h} \in T_g G$ *et tous* $v, w \in \mathfrak{g}$*, on a*

$$\tau(w_{\mathbf{h}}^{*v}) = (g, u, 0, ad_{g^{-1}} w)$$

et

$$\tau(v_{\mathbf{h}}^{*h}) = (g, u, v, 0)$$

où $u = g^{-1}\mathbf{h}$.

Démonstration. Pour la première égalité, notons que $w_{\mathbf{h}}^{*v}$ est tangent en $t = 0$ à la courbe $t \mapsto \mathbf{h} + tgw$ de TG. Dès lors, vu (14),

$$\tau(w_{\mathbf{h}}^{*v}) = \psi_{G\times\mathfrak{g}} \frac{d}{dt}(g, g^{-1}(\mathbf{h} + tgw))_{|t=0} = (g, u, 0, ad_{g^{-1}} w)$$

Pour la seconde, observons que $\tau^{-1}(g,u,v,0)$ est horizontal, par définition de $\mathcal{H}$. De plus, par la Proposition 4.1,

$$\psi_{G*}\tau^{-1}(g,u,v,0) = \psi_G^{-1}(g,v) = v_g^*$$

D'où la conclusion.

Proposition 5.11. *Soient une courbe (I,γ) de G, $s \in I$ et $\mathbf{h} \in T_{\gamma(s)}G$. Pour tout $t \in I$, le transport parallèle de $\mathbf{h}$ le long de (I,γ) de $\gamma(s)$ à $\gamma(t)$ est*

$$\tau_{t,s}(\mathbf{h}) = \gamma(t)\gamma(s)^{-1}\mathbf{h}$$

En particulier, il ne dépend que des points $a = \gamma(s)$ et $b = \gamma(t)$ et non de la courbe (I,γ) qui les relie.

Démonstration. En effet, si

$$\alpha : t \in I \mapsto \gamma(t)\gamma(s)^{-1}\mathbf{h} \in TG$$

alors, comme on le vérifie facilement,

$$\tau(\dot\alpha) = (\gamma, \gamma(s)^{-1}\mathbf{h}, \gamma^{-1}\dot\gamma, 0)$$

ce qui montre que $(I,\dot\alpha)$ est un relèvement horizontal de (I,γ). D'où le résultat puisque $\alpha(s) = \mathbf{h}$.

Proposition 5.12. *Pour tous $u, v \in \mathfrak{g}$, on a*

$$\nabla^{\mathcal{H}}_{u^*}v^* = 0$$

De plus, $R^{\mathcal{H}} = 0$ et

$$T^{\mathcal{H}}(\mathbf{h},\mathbf{k}) = -g[g^{-1}\mathbf{h}, g^{-1}\mathbf{k}]$$

pour tous $\mathbf{h},\mathbf{k} \in T_gG$.

Démonstration. Pour calculer la dérivation covariante, on applique la Proposition 5.3, en tenant compte du fait que le transport parallèle entre deux points d'une courbe ne dépend que des points et non de la courbe : $\varphi_t(g)$ désignant le flot de u^* et $\tau_t(\mathbf{h})$ celui de son relèvement horizontal, il vient ainsi

$$(\nabla^{\mathcal{H}}_{u^*}v^*)_g = \frac{d}{dt}\tau_{-t}(v^*_{\varphi_t(g)})_{|t=0} = \frac{d}{dt}gv_{|t=0} = 0$$

Soient $\mathbf{h},\mathbf{k},\mathbf{l} \in T_gG$. Posons $u = g^{-1}\mathbf{h}, v = g^{-1}\mathbf{k}$ et $w = g^{-1}\mathbf{l}$. Le vecteur tangent $R^{\mathcal{H}}(\mathbf{h},\mathbf{k},\mathbf{l})$ est la valeur en g de

$$R^{\mathcal{H}}(u^*,v^*,w^*) = \nabla^{\mathcal{H}}_{u^*}\nabla^{\mathcal{H}}_{v^*}w^* - \nabla^{\mathcal{H}}_{v^*}\nabla^{\mathcal{H}}_{u^*}w^* - \nabla^{\mathcal{H}}_{[u^*,v^*]}w^* = -\nabla^{\mathcal{H}}_{[u,v]^*}w^* = 0$$

Avec les mêmes notations, il vient semblablement

$$T^{\mathcal{H}}(\mathbf{h},\mathbf{k}) = -[u,v]^*_g = -g[g^{-1}\mathbf{h}, g^{-1}\mathbf{k}]$$

6. Connexions linéaires plates

Nous allons voir à quelle condition le transport parallèle entre deux espaces tangents est indépendant de la courbe le long duquel il est effectué, au moins localement.

De façon précise, nous dirons que le transport parallèle est *localement indépendant de la courbe* si tout point $a \in M$ possède un voisinage ouvert ω ayant la propriété suivante. Pour tous $x, y \in \omega$, le transport parallèle de T_xM à T_yM le long d'une courbe (I, γ) *dont l'image est tout entière dans* ω ne dépend que de x et de y.

6.1. Quelques propriétés des distributions involutives.

Pour étudier cette question, il est utile de rappeler quelques propriétés des distributions involutives.

Notons $\mathcal{M}$ une distribution de classe C^∞ de M, de dimension constante p et involutive. D'après le théorème de Frobénius, la variété M admet une structure de variété différentielle $M^{\mathcal{M}}$ qui en fait une sous-variété de M et dont les composantes connexes sont les *feuilles* de $\mathcal{M}$, c'est-à-dire ses variétés intégrales maximales. De plus, pour tout $a \in M$, il existe une carte (U, φ) de M dont le domaine contient a et telle que

a) pour tout $x \in U$,
$$\mathcal{M}_x = \rangle \partial_1(x), ..., \partial_p(x) \langle$$

b) pour tout $b \in U$,
$$\left\{x \in U | \varphi^{p+1}(x) = \varphi^{p+1}(b), ..., \varphi^m(x) = \varphi^m(b)\right\}$$
est une variété intégrale de $\mathcal{M}$ et un ouvert de $M^{\mathcal{M}}$.

Dans la suite, nous appellerons *carte de Frobenius* une telle carte. Nous utiliserons aussi le résultat suivant, que nous acceptons sans démonstration.

THÉORÈME 6.1. *Soit $f \in C^\infty(N, M)$, où N est une variété différentielle. Si l'image $f(N)$ de f est contenue dans une infinité dénombrable de feuilles de $\mathcal{M}$, alors $f \in C^\infty(N, M^{\mathcal{M}})$.*

On dit qu'une courbe (I, γ) de M est *tangente à* $\mathcal{M}$, si
$$\dot{\gamma}(t) \in \mathcal{M}_{\gamma(t)}$$
pour tout $t \in I$.

THÉORÈME 6.2. *Si (I, γ) de M est tangente à $\mathcal{M}$ alors son image $\gamma(I)$ est contenue dans une feuille de $\mathcal{M}$.*

DÉMONSTRATION. Soit $t_0 \in I$ et une carte de Frobénius (U, φ) dont le domaine contient $a = \gamma(t_0)$. Il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ contenant t_0 tel que $\gamma(J) \subset U$. Pour $t \in J$, puisque (I, γ) est tangent à $\mathcal{M}$, on a

$$\dot{\gamma}^{p+1}(t) = \cdots = \dot{\gamma}^m(t) = 0$$

Par conséquent, les γ^i, $p < i \leq m$, sont constants et $\gamma(J)$ est contenu dans la feuille de a. L'intervalle I a donc un recouvrement par des intervalles dont les images par γ sont chacune contenue dans une feuille de $\mathcal{M}$. Puisque I est de Lindelöf, on peut extraire un recouvrement dénombrable de ce recouvrement. Par conséquent, $\gamma(I)$ est contenu dans une union dénombrable de feuilles de $\mathcal{M}$. L'application $\gamma : I \to M^{\mathcal{M}}$ est donc de classe C^∞ (Théorème 6.1). Comme I est connexe, $\gamma(I)$ est donc un connexe de $M^{\mathcal{M}}$. Il est dès lors contenu dans une composante connexe de $M^{\mathcal{M}}$, c'est-à-dire une feuille de $\mathcal{M}$.

6.2. Champs adaptés. Il est également utile d'introduire des champs de vecteurs locaux particuliers. Etant donnés $a \in M$ et un voisinage normal ω de a, le champ de vecteur $\mathbf{h}^* \in \mathrm{Vect}(\omega)$ *adapté* à $\mathbf{h} \in T_aM$ est le champ dont la valeur en $x \in \omega$ est le transport parallèle $\tau_{1,0}(\mathbf{h})$ de $\mathbf{h}$ en T_xM le long de l'unique arc de géodésique $t \in [0, 1] \mapsto \exp(t\mathbf{k})$ joignant a à x dans ω.

En utilisant la Proposition 4.2, on voit facilement que h^* est de classe C^∞ dans ω. Comme $\mathbf{h} \mapsto \mathbf{h}^*$ est linéaire, pour tout $x \in \omega$, il existe une application linéaire $A_x : T_aM \to T_xM$ telle que

$$\forall \mathbf{h} \in T_aM : \ \mathbf{h}^*_x = A_x\mathbf{h}$$

Les A_x dépendent différentiablement de x. De plus, $\tau_{1,0}$ étant une bijection linéaire, les A_x sont également des bijections.

6.3. Une condition nécessaire... Voici un premier résultat concernant l'indépendance locale du transport parallèle.

PROPOSITION 6.3. *Si le transport parallèle est localement indépendant de la courbe alors la courbure $R^{\mathcal{H}}$ est nulle.*

DÉMONSTRATION. Soit $a \in M$. Nous allons montrer que $R^{\mathcal{H}}_a = 0$. Nous utilisons les notations introduites ci-dessus à propos des champs adaptés et nous désignons par $(x^1, ..., x^m)$ des coordonnées locales dans ω, par exemple celles d'une carte $(\omega, (\exp_{|\Omega})^{-1})$([15]).

Le transport parallèle étant localement indépendant de la courbe, nous pouvons supposer que le relèvement horizontal passant par $\mathbf{h} \in$

[15]Voir le début de la démonstration de la Proposition 5.5.

T_aM d'une courbe (I, γ) de ω, telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = x$, est donc $(I, \mathbf{h}^* \circ \gamma)$. En utilisant le système (23), il vient([16])

$$\sum_{u,v} \partial_u A^w_v \dot{x}^u h^v + \sum_{u,v,t} \Gamma^w_{ut} \dot{x}^u A^t_v h^v = 0$$

Mais $\dot{x}^u(1)$, $\mathbf{h}$ et $x \in \omega$ sont arbitraires. Par conséquent,

$$\Gamma^w_{uv} = -\sum_t \partial_u A^w_t (A^{-1})^t_v$$

En reportant ces valeurs dans l'expression (21) des composantes de $R^{\mathcal{H}}$, on voit facilement qu'elles sont toutes nulles. En particulier, $R^{\mathcal{H}}_a = 0$ comme annoncé.

Traditionnellement, une connexion de courbure nulle est dite *plate*.

6.4. ...qui est aussi suffisante ! La réciproque de la proposition précédente est effectivement vraie. Nous allons l'obtenir comme corollaire d'un résultat plus précis.

Supposons que $R^{\mathcal{H}}$ soit nul. La distribution horisontale $\mathcal{H}$ est alors involutive et TM est partitionné par ses feuilles. Nous noterons $L_{\mathbf{h}}$ celle qui contient $\mathbf{h}$ et $\pi_{\mathbf{h}}$ la restriction de π_M à $L_{\mathbf{h}}$.

THÉORÈME 6.4. *Pour tout* $\mathbf{h} \in TM$*,* $(L_{\mathbf{h}}, \pi_{\mathbf{h}})$ *est un revêtement de* M*.*

DÉMONSTRATION. L'application $\pi_{\mathbf{h}}$ est un difféomorphisme local car sa différentielle est bijective puisque, pour $\mathbf{k} \in L_{\mathbf{h}}$,

$$\ker \pi_{\mathbf{h}*\mathbf{k}} = \mathcal{V}_{\mathbf{k}} \cap \mathcal{H}_{\mathbf{k}} = \{\mathbf{0}\}$$

et $\dim L_{\mathbf{h}} = \dim M$.

L'application $\pi_{\mathbf{h}}$ est également surjective. En effet, soient $x = \pi_M(\mathbf{h})$ et $y \in M$. Puisque M est connexe([17]), il existe une courbe (I, γ) de M vérifiant $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Le relèvement horizontal (I, α) de cette courbe passant par $\mathbf{h}$ en $t = 0$ est tout entier contenu dans $L_{\mathbf{h}}$ (Théorème 6.2). Par conséquent, $\alpha(1) \in L_{\mathbf{h}}$ et $\pi_{\mathbf{h}}(\alpha(1)) = y$.

Il reste à montrer que tout point de M possède un voisinge ouvert ω tel que $\pi_{\mathbf{h}}$ soit un difféomorphisme de chaque composante connexe de $\pi_{\mathbf{h}}^{-1}\omega$ sur ω. Soient $x \in M$ et un voisinage normal ω de x. Nous utilisons les notations de la section 6.2. Soit $\mathbf{k} \in T_xM \cap L_{\mathbf{h}}$. Par le Théorème 6.2, l'image $\mathbf{k}^*(\omega)$ du champ adapté à $\mathbf{k}$ dans ω est contenue dans $\pi_{\mathbf{h}}^{-1}\omega$. Par le Théorème 6.1, l'application $y \in \omega \mapsto \mathbf{k}^*(y) \in L_{\mathbf{h}}$ est

[16]On confond A et son expression locale. Celles de $\mathbf{h}$ et γ sont notées h et $t \mapsto x(t)$.

[17]Donc, connexe par arcs...

donc de classe C^∞. Puisque ω est connexe, $\mathbf{k}^*(\omega)$ est un connexe de $\pi_{\mathbf{h}}^{-1}\omega$. de plus, il est clair que $\pi_{\mathbf{h}} : \mathbf{k}^*(\omega) \to \omega$ est injectif. Il résulte alors du Lemme 5.1 que $\mathbf{k}^*(\omega)$ est un ouvert de $L_{\mathbf{h}}$ et que $\pi_{\mathbf{h}} : \mathbf{k}^*(\omega) \to \omega$ est un difféomorphisme. Soient une composante connexe $\mathcal{C}$ de $\pi_{\mathbf{h}}^{-1}\omega$, $\mathbf{h}' \in \mathcal{C}$ et $y = \pi_M(\mathbf{h}')$. Il existe $\mathbf{k} \in T_xM$ tel que $\mathbf{k}^*(y) = \mathbf{h}'$. Pour un tel $\mathbf{k}$, on a $\mathbf{k}^*(\omega) \subset \mathcal{C}$. Or les $\mathbf{k}^*(\omega)$, $\mathbf{k} \in T_xM \cap L_{\mathbf{h}}$, sont deux à deux disjoints. Au total, ce sont donc les composantes connexes de $\pi_{\mathbf{h}}^{-1}\omega$. D'où le théorème.

Corollaire 6.5. *Lorsque la courbure de $\mathcal{H}$ est nulle, le transport parallèle est localement indépendant de la courbe. Il l'est globalement si M est simplement connexe.*

Démonstration. Cela résulte immédiatement du théorème précédent et des propriétés des revêtements.

6.5. Variétés parallélisables. La variété M est *parallélisable* s'il existe des champs de vecteurs $X_1, ..., X_m$, où $m = \dim M$, qui engendrent T_xM en tout $x \in M$. De tels champs forment alors une *parallélisation* de M. Sur un groupe de Lie, les champs de vecteurs invariants à gauche associés à une base de l'algèbre de Lie du groupe en forment une parallélisation.

Supposons M parallélisable. Soient $(X_1, ..., X_m)$ et $(\varepsilon^1, ..., \varepsilon^m)$ une de ses parallélisations et la base duale de celle-ci. Soit aussi $x \in M$. Pour tout $\mathbf{h} \in T_xM$, $\mathbf{h}^* \in \mathrm{Vect}M$ est défini par

$$y \mapsto \mathbf{h}^*(y) = \sum_i \langle \mathbf{h}, \varepsilon^i(x)x \rangle X_i(y)$$

Remarquons que $\mathbf{h}$ étant fixé, les coefficients $\langle \mathbf{h}^*, \varepsilon^i \rangle$ sont constants. Donc, si $\mathbf{h}^*$ et $\mathbf{k}^*$ sont égaux en un point, alors $\mathbf{h}^* = \mathbf{k}^*$. En outre, $\mathbf{h}^*$ ne dépend pas de la trivialisation choisie pour le définir.

Théorème 6.6. *Si M est parallélisable, alors il admet une unique connexion liénaire de courbure nulle telle que pour toute courbe (I, γ) de M et tous $s, t \in I$, le transport parallèle de $\mathbf{h} \in T_{\gamma(s)}M$ le long de γ de $\gamma(s)$ à $\gamma(t)$ est*

$$\tau_{t,s}\mathbf{h} = \mathbf{h}^*(\gamma(t))$$

Il ne dépend donc pas de la courbe. En particulier, les géodésiques de M sont les courbes intégrales des champs $\mathbf{h}^*$.

Démonstration. Soit $\mathbf{h} \in TM$. L'application $x \to \mathbf{h}^*(x)$ est de classe C^∞ et injective de M dans TM. En utilisant une parallélisation de M, on voit facilement que c'est une immersion. Dès lors, $L_{\mathbf{h}} = \mathbf{h}^*(M)$ est une sous-variété de dimension m de TM et π_M est un difféomorphisme de $L_{\mathbf{h}}$ sur M. Il est clair que les $L_{\mathbf{h}}$ sont deux à deux disjoints. De plus,

$$\sigma_s^{TM} L_{\mathbf{h}} = L_{\sigma_s^{TM}\mathbf{h}}$$

pour tout $s \in \mathbb{R}$. La distribution

$$\mathcal{H} : \mathbf{h} \mapsto T_{\mathbf{h}} L_{\mathbf{h}}$$

de TM est donc stable par σ_{s*}^{TM}. Elle est involutive, les $L_{\mathbf{h}}$ en étant les variétés intégrales. On a

$$\mathcal{H}_{\mathbf{h}} \cap \mathcal{V}_{\mathbf{h}} = T_{\mathbf{h}} L_{\mathbf{h}} \cap \ker \pi_{M*\mathbf{h}} = 0$$

puisque π_M est un difféomorphisme de $L_{\mathbf{h}}$ sur M. En conséquence, $\mathcal{H}$ est une connexion linéaire plate de M.

Soient une courbe (I, γ) de M et $s \in I$. L'image du relèvement horizontal $(I, t \mapsto h(t))$ de (I, γ) passant par $\mathbf{h} \in T_{\gamma(s)}M$ en $t = s$ est tout entière dans $L_{\mathbf{h}}$. Par conséquent,

$$\tau_{t,s}\mathbf{h} = \mathbf{h}^*(\gamma(t))$$

L'unicité de la connexion cherchée est immédiate, de même que le cas particulier.