EQUATIONS ISOCHRONES ET APPLICATIONS EXPONENTIELLES DANS $\mathbf{R}^m$

PIERRE LECOMTE

1

On considère ici un système d'équations différentielles du second ordre autonomes [1] de n équations à n inconnues

$$\begin{cases} x_1'' &= f_1(x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n') \\ & \vdots \\ x_n'' &= f_n(x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n') \end{cases}$$

On abrège les notations en l'écrivant sous la forme

$$x'' = f(x, x') \tag{1}$$

où $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $f = (f_1, \ldots, f_n)$.

Par hypothèse,

$$f : (x, h) \in \Omega \times \mathbf{R}^n \mapsto f(x, h) \in \mathbf{R}^n$$

est de classe C^∞, où Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^n$.

Pour tout $(x_0, h) \in \Omega \times \mathbf{R}^n$, ce système possède une, et une seule, solution maximale, c'est-à-dire définie dans le plus grand intervalle de $\mathbf{R}$ possible, passant par x_0 en $t = 0$ et tangente à h en $t = 0$ [2]. On la note

$$t \mapsto u(t, x_0, h)$$

et on note $I_{x_0,h}$ son intervalle de définition. Elle est de classe C^∞, tout comme f. Plus précisément, l'ensemble

$$\{(t, x_0, h) | x_0 \in \Omega, h \in \mathbf{R}^n, t \in I_{x_0,h}\}$$

est un ouvert de $\mathbf{R} \times \Omega \times \mathbf{R}^n$ dans lequel la fonction u est de classe C^∞.

1. Cela veut dire que les seconds membres f_k ne dépendent pas explicitement de t.
2. Ceci signifie que h est la valeur de la dérivée de la solution en $t = 0$.

2

L'équation (1) est dite *isochrone* si, pour tout nombre réel c et tout $(x_0, h) \in \Omega \times \mathbf{R}^n$, l'application

$$t \in \frac{1}{c} I_{x_0,h} \mapsto u(ct, x_0, h) \in \mathbf{R}^n \tag{2}$$

en est une solution. Pour être précis, que c soit nul ou pas, l'intervalle de définition de cette fonction est défini par la condition

$$t \in \frac{1}{c} I_{x_0,h} \iff tc \in I_{x_0,h}$$

Proposition 2.1. *L'équation (1) est isochrone si, et seulement si, l'application f est quadratique en sa seconde variable h.*

Démonstration. Supposons l'équation isochrone et, pour alléger l'écriture, notons $v : t \mapsto v(t)$ la fonction (2) et abrégeons $u(t, x_0, h)$ en $u(t)$. Nous avons

$$v'(t) = cu'(ct), \quad v''(t) = c^2 u''(ct) \tag{3}$$

Ainsi, v est une solution de l'équation différentielle si, et seulement si,

$$c^2 u''(ct) = f(u(ct), cu'(ct))$$

pour tout t dans son intervalle de définition. D'un autre côté, u étant une solution, on a aussi

$$u''(ct) = f(u(ct), u'(ct))$$

de sorte que

$$c^2 f(u(ct), u'(ct)) = f(u(ct), cu'(ct))$$

En particulier, en faisant $t = 0$ dans cette égalité, nous obtenons

$$c^2 f(x_0, h) = f(x_0, ch)$$

de sorte que f est quadratique[3] en h.

Pour la réciproque, il suffit de relire la preuve précédente «à l'envers». □

3. En dérivant deux fois la relation $c^2 f(x_0, h) = f(x_0, ch)$ par rapport à c puis en faisant $c = 0$, on obtient

$$2f(x_0, h) = \sum_{ij} \partial_{ij} f(x_0, 0) h^i h^j$$

3

Désormais, nous supposons l'équation (1) isochrone et nous continuons d'utiliser les notations de la preuve de la proposition.

Pour identifier v, posons $t = 0$ dans (3). Cela donne $v(0) = x_0$ et $v'(0) = ch$. Dès lors
$$v(t) = u(t, x_0, ch)$$
Cela étant, par définition, $v(t) = u(ct, x_0, h)$. En intervertissant les notations c et t, nous obtenons ainsi
$$u(ct, x_0, h) = u(c, x_0, th)$$
égalité ayant lieu pour $ct \in I_{x_0,h}$. En prenant $c = 1$, il vient finalement
$$\forall t \in I_{x_0,h}, \quad u(t, x_0, h) = u(1, x_0, th)$$
Ceci montre que $u(t, x_0, h)$ ne dépend de t et h que par l'intermédiaire de leur produit th. Les solutions de l'équation isochrone sont donc complètement décrites par la fonction qui a (x_0, h) tel que $1 \in I_{x_0,h}$, associe
$$\exp_{x_0}(h) := u(1, x_0, h)$$
On peut démontrer que l'ensemble
$$\mathcal{D} = \{(x_0, h) \in \Omega \times \mathbf{R}^n | 1 \in I_{x_0,h}\}$$
est un ouvert de $\Omega \times \mathbf{R}^n$ dans lequel $\exp : (x_0, h) \mapsto \exp_{x_0}(h)$ est de classe C^∞ mais nous ne le ferons pas. Remarquons que $\mathcal{D}$ est radial, en ce sens que s'il contient (x_0, h), alors ils contient aussi (x_0, th) pour tout $t \in [0, 1]$. En effet, si $1 \in I_{x_0,h}$ alors l'intervalle $I_{x_0,h}$ inclut $[0, 1]$ car il contient aussi 0.

L'application exp est *l'application exponentielle* de l'équation isochrone.

Il se fait que

Proposition 3.1. *L'application* exp *est un changement variables régulier d'ordre C^∞ entre un ouvert radial $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ contenant $\Omega \times \{0\}$ et un ouvert de $\Omega \times \Omega$ contenant sa diagonale, i.e. $\{(x, x) | x \in \Omega\}$.*

Cette importante propriété est assez difficile à établir. Par contre, il est très simple de vérifier la suivante.

Proposition 3.2. *Pour tout $x_0 \in \Omega$, $\exp_{x_0}$ est un changement de variables régulier d'ordre C^∞ d'un voisinage ouvert étoilé sur 0 dans $\mathbf{R}^n$ et un voisinage ouvert de x_0 dans Ω.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du théorème de la fonction inverse : la différentielle de $\exp_{x_0}$ en 0 est non singulière, car c'est l'identité puisque
$$(\exp_{x_0})_{*0} h = \frac{d}{dt} \exp_{x_0}(th)_{|t=0} = h$$
$\square$

4

Pour $\Omega = \mathbf{R}^n$ et $f = 0$, autrement dit pour l'équation $x'' = 0$ posée dans $\mathbf{R}^n$, on voit tout de suite que

$$u(t, x_0, h) = x_0 + th$$

et $I_{x_0,h} = \mathbf{R}$. Ainsi,

$$\exp_{x_0} : h \mapsto x_0 + h$$

est la translation par x_0 de $\mathbf{R}^n$. On a ici $\mathcal{D} = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$. Pour un ouvert quelconque Ω de $\mathbf{R}^n$, et encore avec $f = 0$, exp est la restriction de la fonction $(x, h) \mapsto x + h$ à

$$\mathcal{D} = \{(x, h) | x, x + h \in \Omega\}$$

5

A présent, nous prenons pour Ω l'ensemble $GL(p, \mathbf{R})$ des matrices réelles, carrées et non singulières de dimension [4] p et pour f la fonction quadratique en h

$$f : (x, h) \in GL(p, \mathbf{R}) \times gl(p, \mathbf{R}) \mapsto hx^{-1}h \in gl(p, \mathbf{R})$$

L'équation isochrone s'écrit donc

$$x'' = x'x^{-1}x' \tag{4}$$

Il s'avère que la fonction

$$F : (x, h) \in GL(p, \mathbf{R}) \times gl(p, \mathbf{R}) \mapsto x^{-1}h \in gl(p, \mathbf{R})$$

en est une intégrale première [5]. En effet [6],

$$F(x, x')' = (x^{-1})'x' + x^{-1}x'' = x'(x'' - x'x^{-1}x')$$

est nul pour toute solution x de l'équation. Si nous prenons pour x la solution passant par x_0 et tangente à h en $t = 0$, il vient donc

$$F(x(t), x'(t)) = x^{-1}(t)x'(t) = F(x(0), x'(0)) = x_0^{-1}h$$

de sorte que x est la solution de l'équation *du premier ordre*

$$x' = xx_0^{-1}h, \quad x(0) = x_0$$

4. L'ensemble $gl(p, \mathbf{R})$ des matrices réelles, carrées et de dimension p s'identifie à $\mathbf{R}^{p^2}$ et le groupe $GL(p, \mathbf{R})$ en est un ouvert puisque la fonction det est continue. Les notations $gl(p, \mathbf{R})$ et $GL(p, \mathbf{R})$ sont classiques en théorie des groupes.

5. Une *intégrale première* d'une équation différentielle d'ordre deux est une fonction F de x et de h qui est constante le long de chaque solution de l'équation, c'est-à-dire telle que $F(x, x')$ soit constant pour toute solution $t \mapsto x(t)$ de l'équation.

6. En dérivant les deux membres de la relation $x^{-1}x = I_p$, où I_p est la matrice unité de dimension p, on obtient

$$(x^{-1})' = -x'x^{-1}x'$$

Cela dit, comme on le voit par calcul direct, le produit à gauche d'une solution de (4) par une matrice constante en est encore une solution. Dès lors, avec les notations désormais familières,

$$u(t, x_0, h) = x_0 u(t, I_p, h) = x_0 \exp_{I_p}(th)$$

La fonction $t \mapsto \exp_{I_p}(th)$ est la solution maximale de l'équation du premier ordre

$$x' = xh, \quad x(0) = I_p \tag{5}$$

Comme cette équation est linéaire et autonome, sa solution est définie sur $\mathbf{R}$ tout entier. Par définition, l'*exponentielle d'une matrice* $h \in gl(p, \mathbf{R})$ est

$$\exp h := \exp_{I_p}(h)$$

On la note encore e^h. La solution maximale de l'équation ci-dessus est alors la fonction

$$t \in \mathbf{R} \mapsto e^{th} \in GL(p, \mathbf{R})$$

En particulier, le domaine $\mathcal{D}$ de l'application exponentielle exp de l'équation isochrone (4) est $GL(p, \mathbf{R}) \times gl(p, \mathbf{R})$.

6

Pour $p = 1$, $gl(p, \mathbf{R})$ s'identifie à $\mathbf{R}$, une matrice carrée de dimension 1 se confondant avec son unique composante. Dans ce cas, l'application exponentielle de l'équation isochrone (4) rend l'application exponentielle usuelle des nombres réels. Dans $\mathbf{R}$, l'unique solution (maximale) de l'équation (5) est effectivement $t \mapsto e^{th}$, où e est la base du logarithme népérien.

7

Prenons cette fois pour Ω l'ensemble des nombres complexes non nuls et pour f la fonction

$$(z, h) \in \Omega \times \mathbf{C} \mapsto \frac{h^2}{z} \in \mathbf{C}$$

L'équation différentielle isochrone correspondante

$$z'' = \frac{z'^2}{z} \tag{6}$$

admet aussi une intégrale première qui permet de baisser son ordre à un. C'est la fonction

$$(z, h) \in \Omega \times \mathbf{C} \mapsto \frac{h}{z}$$

La solution maximale de (6) tangente à $h \in \mathbf{C}$ en $t = 0$ et passant par 1 en $t = 0$ est donc l'unique solution maximale de l'équation

$$z' = zu, \quad z(0) = 1$$

On reconnaît dans celle-ci la fonction $t \mapsto e^{th}$ où e^{th} est l'exponentielle classique des nombres complexes évaluée en th. Cette exponentielle classique est donc, une fois encore, déduite de l'exponentielle de l'équation isochrone :

$$e^h = \exp_1(h)$$

8

La notion d'équation différentielle d'ordre deux isochrone se généralise aux variétés différentielles sur lesquelles elle est reliée à des notions fort importantes, telle que celles de connexion linéaire, dérivation covariante, courbure, géodésique, etc. Le lecteur intéressé pourra consulter le texte que j'ai rédigé sur la question dans un pdf qui se trouve à cette url :

`http://www.geothalg.ulg.ac.be/GD_Option_I.pdf`

On y étudie en particulier le cas des groupes de Lie. Ils possèdent une équation isochrone canonique dont l'exponentielle, évaluée en le neutre, donne ce qu'on appelle classiquement l'exponentielle des groupes de Lie.

C'est de celle-ci dont il a été question ci-dessus à propos du groupe additif $\mathbf{R}^n$ (à la section 4), du groupe $GL(p, \mathbf{R})$ ou encore de celui des nombres complexes non nuls. Dans ces exemples, le groupe est un ouvert d'un espace $\mathbf{R}^m$, ce qui nous a permis d'utiliser le vocabulaire et les résultats présentés dans les sections 1 à 3 sans devoir explicitement utiliser leur structure de variété. Pour englober la trigonométrie dans le schema général, c'est-à-dire récupérer l'exponentielle $e^{ix}, x \in \mathbf{R}$, il faudrait considérer le groupe S^1 des nombres complexes de module égal à 1. Ce n'est pas un ouvert d'un espace $\mathbf{R}^m$ mais c'est un groupe de Lie et l'équation isochrone d'ordre deux dont il est canoniquement équipé donne l'exponentielle e^{ix} cherchée.

Une dernière remarque. La parenté manifeste entre les équations (4) et (6) s'explique facilement. Elle provient du fait que l'application

$$a + ib \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme de groupes (de Lie) entre le groupe des nombres complexes non nuls et son image, qui est un sous-groupe de $GL(2, \mathbf{R})$.