# DES SOLIDES DE PLATON AUX POLYÈDRES DE CATALAN

PIERRE LECOMTE

## 1

Il y a cinq sortes de polyèdres réguliers, encore appelés *solides de Platon* : les *tétraèdres*, les *hexaèdres*, les *octaèdres*, les *dodécaèdres* et les *icosaèdres*[1].

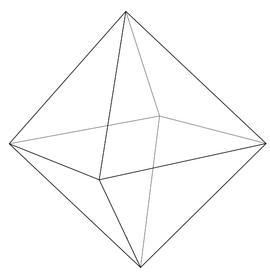
Leurs noms sont formés d'après le nombre de leurs faces, exprimé en grec. Voici la traduction : *tétra*=4, *hexa*=6, *octa*=8, *dodéca*=12, *icosa*=20.

Les plus familiers sont les hexaèdres. Sous ce nom se cachent les *cubes* avec lesquels la plupart des enfants jouent dès leur plus jeune âge. Leurs faces sont des carrés.

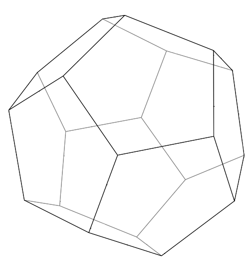
Beaucoup d'élèves de l'enseignement secondaire ont rencontré des tétraèdres. Il s'agit de pyramides à bases triangulaires. Les faces des tétraèdres sont des triangles équilatéraux.

Les trois autres familles sont sans doutes moins connues, pour ne pas dire inconnues, de la plupart des écoliers.

Les octaèdres

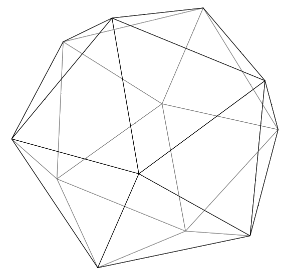


sont formés de deux pyramides à base carrée situées de part et d'autre de leur base commune. Leurs faces sont des triangles équilatéraux. Voici ensuite un dodécaèdre. Ses douze faces sont des pentagones réguliers.



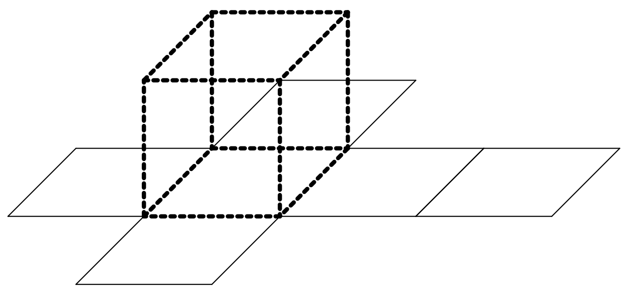
et un icosaèdre, dont les faces sont à nouveaux des triangles équilatéraux.

1. Naturellement, il existe des tétraèdres, hexaèdres, etc. qui ne sont pas réguliers. Mais dans la suite de cette section, tous les polyèdres considérés sont supposés réguliers, on ne le répètera pas.



Pour construire les polyèdres réguliers, on peut utiliser des *patrons*, ou *développements*, ces figures planes que l'on obtient en déployant le polyèdre sur le plan d'une de ses faces.

Voici un exemple de patron de cube :



La place manque ici pour décrire des développements de chaque sorte de polyèdres réguliers. Ils sont joliment présentés, avec des animations illustrant comment déployer un polyèdre sur son patron et *vice versa*, à la page web suivante :

therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/textes/platon.htm

## 2

Au bas de la même page web, on trouve la preuve donnée par Euclide du fait qu'il n'y a pas d'autres sortes de polyèdres réguliers que celles brièvement décrites ci-dessus. Nous allons dire quelques mots d'une autre preuve de ce fait. Elle repose sur la relation d'Euler

$$s - a + f = 2$$

liant le nombre $s$ de sommets, le nombre $a$ d'arêtes et le nombre $f$ de faces d'un polyèdre convexe[2]. On trouve aisément des preuves de cette relation sur le web. La nouvelle preuve a l'avantage de donner directement les nombres $s, a, f$ pour chaque polyèdre régulier.

Les faces d'un polyèdre régulier $\mathcal{P}$ sont des copies d'un polygone régulier, disons à $p$ côtés, et de chacun de ses sommets partent le même nombre d'arêtes, disons $q$. Par exemple, pour un octaèdre, $p = 3$ et $q = 4$ et, pour un dodécaèdre, $p = 5$ et $q = 3$.

Le nombre total $r$ de côtés de $f$ polygones à $p$ côtés est, naturellement, $fp$ mais, comme chaque arête de $\mathcal{P}$ est commune à deux faces exactement, $r$ vaut le double du nombre d'arêtes du polyèdre. On a donc $r = fp = 2a$.

2. Par définition, un polyèdre est *convexe* s'il est tout entier d'un seul côté de chacune de ses faces. Il ne présente donc aucun angle rentrant. Par définitions, les polyèdres réguliers sont convexes et dans ce texte, nous ne considèrerons que des polyèdres convexes.

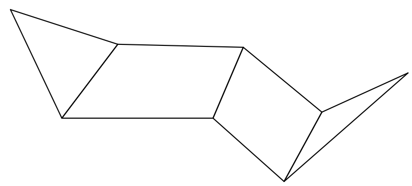
De façon analogue, puisque de chaque sommet de $\mathcal{P}$ partent $q$ arêtes et que chaque arête est commune à deux sommets exactement, nous avons aussi $sq = 2a$. Au total

$$s = \frac{r}{q}, \quad a = \frac{r}{2}, \quad f = \frac{r}{p} \tag{1}$$

En reportant ces valeurs dans la relation d'Euler, nous obtenons

$$\frac{1}{q} - \frac{1}{2} + \frac{1}{p} = \frac{2}{r} \tag{2}$$

Observons que $q$ vaut au minimum 3 : s'il n'y avait que deux arêtes partant de chaque sommet de $\mathcal{P}$, celui-ci serait plat, comme illustré sur la figure ci-dessous.



Bien entendu, $p$ aussi vaut au moins 3 mais, plus subtil, il ne dépasse pas 5. En effet, si $p$ était supérieur ou égal à 6, alors on aurait

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{p} \leqslant -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$$

de sorte que

$$\frac{2}{r} \leqslant \frac{1}{q} - \frac{1}{3} \leqslant 0$$

une contradiction.

Ainsi, les faces de $\mathcal{P}$ sont des triangles équilatéraux, des carrés ou des pentagones réguliers.

Pour chacun de ces cas, l'équation (2) permet de trouver les valeurs correspondantes de $q$ et de $r$ et donc, de déterminer $s, a, f$, grâce à (1).

On va illustrer cela en détectant quels polyèdres réguliers on pourrait éventuellement construire avec des triangles équilatéraux, i.e. pour lesquels $p = 3$.

En remplaçant $p$ par 3 dans (2), on obtient

$$\frac{1}{q} = \frac{2}{r} + \frac{1}{6} > \frac{1}{6}$$

car $2/r$ doit être strictement positif. Ainsi, $q$ peut valoir $3, 4$ ou $5$, ce qui donne facilement les solutions

| $p$ | $q$ | $r$ | $s$ | $a$ | $f$ | nature |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 12 | 4 | 6 | 4 | tétraèdre |
| 3 | 4 | 24 | 6 | 12 | 8 | octaèdre |
| 3 | 5 | 60 | 12 | 30 | 20 | icosaèdre |

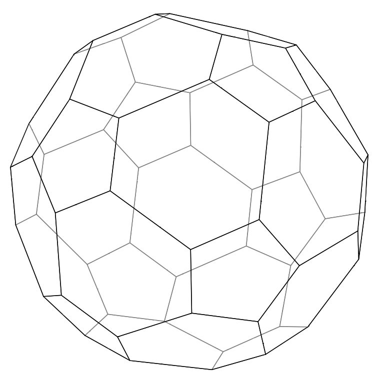
La même méthode, appliquée aux faces carrées et pentagonales, donne deux solutions supplémentaires

| $p$ | $q$ | $r$ | $s$ | $a$ | $f$ | nature |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 24 | 8 | 12 | 6 | cube |
| 5 | 3 | 60 | 20 | 30 | 12 | dodécaèdre |

ce qui achève de prouver qu'il y a au plus cinq familles de polyèdres réguliers.

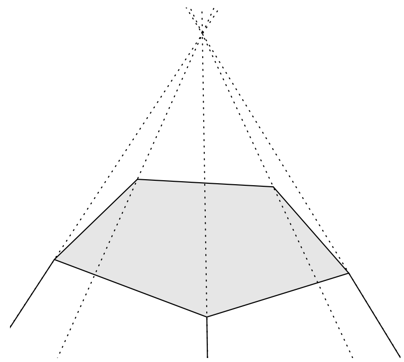
## 3

Le polyèdre suivant



ressemble fortement à un ballon de football. Ses faces sont de deux sortes : il y a des pentagones et des hexagones. En chaque sommet, un pentagone et deux hexagones se rejoignent. A cause de la perspective, on ne voit pas sur l'image, mais c'est pourtant le cas, que les pentagones et les hexagones sont réguliers, que les arêtes ont toutes la même longueur et que la disposition des faces aboutissant à un même sommet est la même pour tous les sommets. Sans être régulier, ce polyèdre présente cependant une très grande symétrie. On dit qu'il est *semi-régulier*. En général, un polyèdre semi-régulier est un polyèdre convexe dont les faces sont des polygones réguliers. Il peut y en avoir de différentes sortes mais la longueur de leurs côtés est la même pour tous, c'est la longueur commune aux arêtes du polyèdre. De plus, la disposition des faces aboutissant à un sommet doit être la même pour tous les sommets.

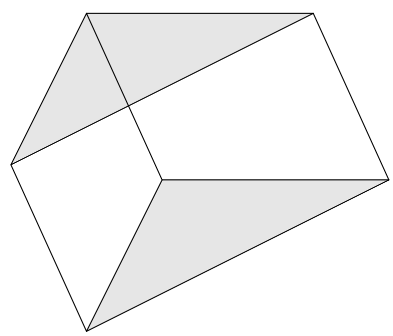
Pour le polyèdre représenté ci-dessus, $(s, a, f) = (60, 90, 32)$. C'est un peu difficile à voir sur le dessin, mais il y a douze faces pentagonales. En fait, il est obtenu en tronquant un icosaèdre. Cela signifie qu'en chaque sommet de l'icosaèdre, on a ôté une petite pyramide, comme suggéré dans le dessin suivant, en coupant le polyèdre par un plan passant un peu en dessous du sommet.



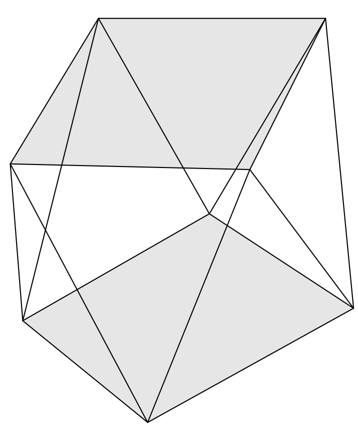
Puisque cinq arêtes sont issues du sommet, la section est un pentagone. Si le plan est bien choisi, il est régulier. L'icosaèdre ayant douze sommets, on obtient bien, par troncature, douze pentagones.

La troncature de polyèdres réguliers ou semi-réguliers est un moyen de construire des polyèdres semi-réguliers.

Les prismes et les antiprismes fournissent d'autres exemples de polyèdres semi-réguliers. Un *prisme* s'obtient en translatant un polygone hors de son plan, comme sur ce dessin :

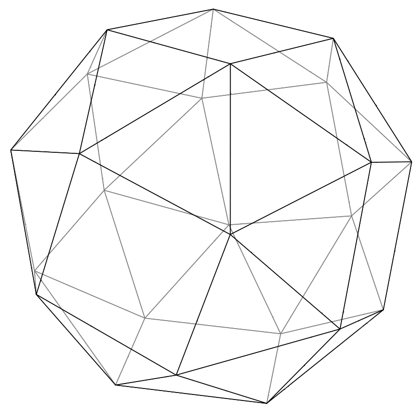


où c'est un triangle qui est translaté. Pour obtenir un polyèdre semi-régulier, il faut partir d'un polygone régulier et la longueur du vecteur de translation doit être la même que celle des côtés du polygone.



Pour obtenir un *antiprisme* on translate un polygone hors de son plan, on fait tourner le résultat dans son propre plan puis on forme des triangles avec les côtés et les sommets des deux polygones, en alternant le polygone et son translaté pour choisir le côté. Le dessin ci-dessus représente un antiprisme obtenu à partir d'un quadrilatère. Il est clair qu'au départ d'un polygone régulier, on peut fabriquer un antiprisme semi-régulier, c'est-à-dire faire en sorte que les triangles obtenus soient équilatéraux.

En dehors des prismes et antiprismes semi-réguliers, il existe quinze sortes de polyèdres semi-réguliers. Les polyèdres de ces familles sont appelés les *solides d'Archimède.* Nous n'allons pas procéder ici à leur classification. Ce serait trop long et compliqué. Ces polyèdres sont visibles sur la page web http ://fr.wikipedia.org/wiki/Solide_d'Archimède. Certains sont obtenus par troncatures et d'autres en *adoucissant* des polyèdres réguliers. Sans entrer dans les détails, pour adoucir un polyèdre, on écarte ses faces et on comble les trous avec des triangles équilatéraux. Voici un exemple, un *cube adouci.*



Son image dans un miroir ne lui est pas superposable. On dit que ces deux polyèdres sont *énantiomorphes.* Il y a un autre solide d'Archimède qui n'est pas superposable à son image dans un miroir. C'est un dodécaèdre adouci. Tous les autres solides d'Archimède sont superposables à leur image dans un miroir. C'est pourquoi certains auteurs disent qu'il y a quinze familles de solides d'Archimède car ils ne considèrent pas deux formes énantiomorphes comme équivalentes alors que d'autres, au contraire, ne les distinguent pas et parlent donc des treize familles de solides d'Archimède.

## 4

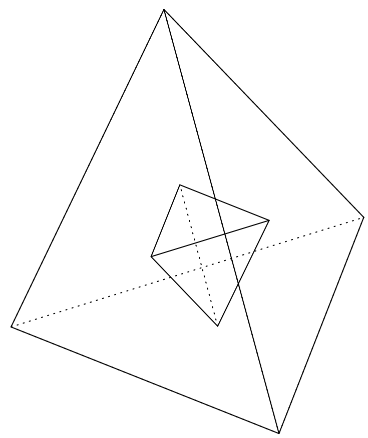
L'équation (2) est symétrique en $p$ et $q$ et montre *a priori* que l'on peut apparier les polyèdres réguliers de manière telle que deux polyèdres appariés aient même nombre d'arêtes et chacun autant de faces que l'autre a de sommets. De fait, le dodécaèdre et l'icosaèdre ont le même nombre d'arêtes tandis que le nombre de face de chacun est égal au nombre de sommets de l'autre. Il en va de même pour le cube et l'octaèdre. Les tétraèdres font un peu bande à part car ils ont autant de sommets que de faces (i.e. $p = q$) et sont donc appariés à eux-mêmes.

Mais cette correspondance est plus subtile qu'un simple échange des nombres de faces et de sommets. En effet, on peut montrer que quand deux polyèdres réguliers $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont appariés on peut faire correspondre aux sommets et aux faces de $\mathcal{P}$ respectivement les faces et les sommets de $\mathcal{P}'$ *en respectant les relations d'incidence dans les deux sens.* Autrement dit, de manière telle que si un sommet $A$ de $\mathcal{P}$ ( respectivement de $\mathcal{P}'$) appartient à sa face $F$, alors la face image de $A$ dans $\mathcal{P}'$ (respectivement dans $\mathcal{P}$) passe par le sommet image de $F$.

Une telle correspondance entre points et plans (ceux contenant les faces, dans le cas des polyèdres) respectant les relations d'incidence dans les deux sens s'appelle une *dualité.*

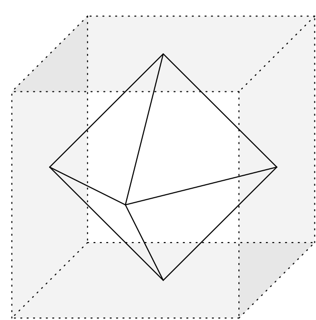
On dit alors de polyèdres qui se correspondent de cette façon que chacun est *le dual* de l'autre. Il serait trop long de définir en général la dualité entre polyèdres ici et je vais juste citer deux constructions qui suffiront à nos besoins.

La première concerne les polyèdres réguliers et est particulièrement simple. Dans celle-ci, pour construire un polyèdre $\mathcal{P}'$ dual d'un polyèdre régulier $\mathcal{P}$, on prend pour sommets les centres de gravité des faces de $\mathcal{P}$ et on joint chacun d'eux aux centres des faces qui ont une arête commune avec celle à laquelle il appartient, comme illustré sur le dessin suivant.



La dualité en question fait correspondre chaque face de $\mathcal{P}$ à son centre de gravité et chacun de ses sommets à la face de $\mathcal{P}'$ dont les sommets sont les centres de gravité des faces de $\mathcal{P}$ qui passent par ce sommet.

Il est encore relativement facile de visualiser cette construction à propos du cube et de l'octaèdre. Appliquons-la à un cube. Etant donné le centre de gravité d'une face d'un cube, les quatre centres des faces contigües sont les sommets d'un carré qui est la base d'une pyramide dont il est l'apex.

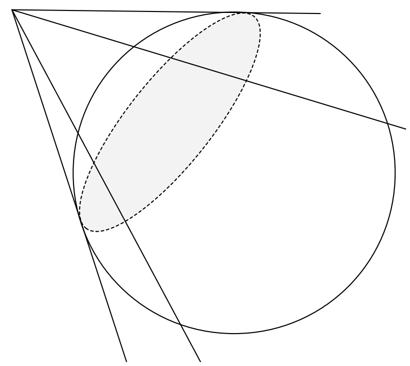


C'est l'une des deux pyramides formant l'octaèdre associé au cube, la seconde provenant de la face opposée à la première.

Nous ne nous risquerons pas à visualiser la dualité entre un octaèdre et un icosaèdre. Les figures seraient beaucoup trop chargées.

Certains polyèdres, parmi lesquels les polyèdres réguliers et les solides d'Archimède, admettent une sphère qui est tangente à chaque arête. En anglais, on l'appelle *midsphere* car elle est, en quelque sorte, intermédiaire entre une sphère inscrite (tangente à chaque face) et une sphère circonscrite (passant par tous les sommets). Nous l'appellerons *sphère intermédiaire*[3].

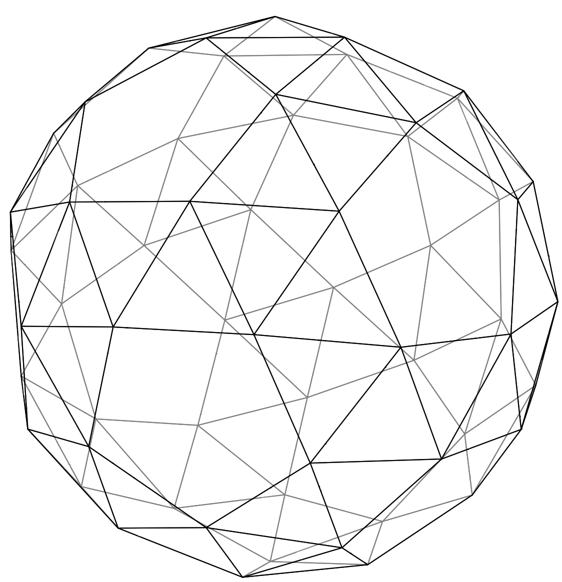
Une sphère intermédiaire d'un polyèdre $\mathcal{P}$ permet d'en construire facilement un dual. Les arêtes issues d'un sommet $A$ de $\mathcal{P}$ sont tangentes à la sphère intermédiaire et leurs points de contact sont disposés sur un cercle de cette sphère. Dans la dualité associée à la sphère intermédiaire, on associe à $A$ le plan de ce cercle.



Les plans associés aux sommets de $\mathcal{P}$ délimitent un polyèdre dual de $\mathcal{P}$[4].

Ayant clarifié la notion de dualité entre polyèdres, du moins à propos des solides de Platon et d'Archimède, nous arrivons au terme de notre cheminement "Des solides de Platon aux polyèdres de Catalan". En effet, une contribution célèbre de Catalan à la géométrie est la découverte et l'étude des polyèdres duaux des solides d'Archimède, raison pour laquelle on appelle ces duaux les *polyèdres de Catalan*, ou encore *solides de Catalan* !

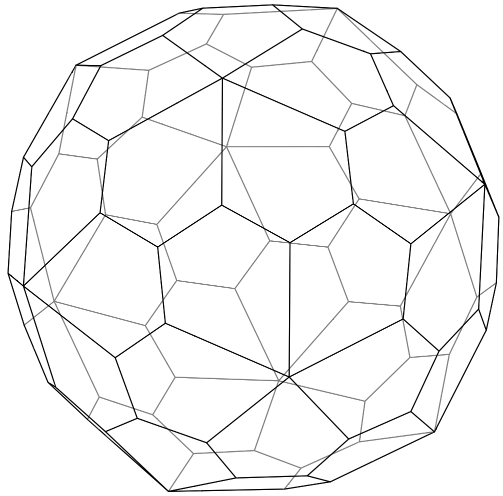
Voici un polyèdre d'Archimède, un dodécaèdre adouci



et son dual, un *hexacontaèdre pentagonal*

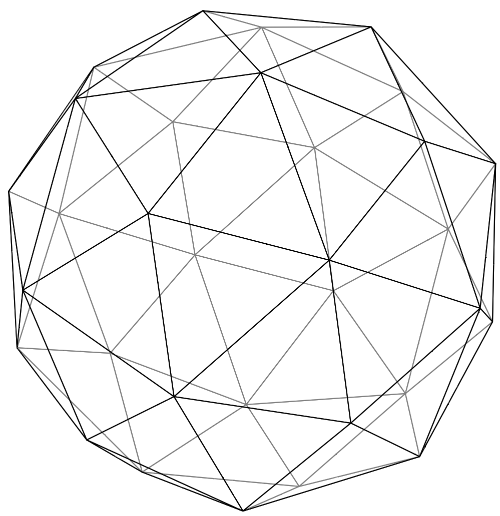
3. Cette dénomination n'a rien d'officiel.

4. La vérification repose essentiellement sur les propriétés de la polarité par rapport à la sphère. Nous ne détaillerons pas.



Le fait que ses faces ne semblent pas régulières n'est pas dû à la perspective. Elles ne le sont pas : les faces des solides de Catalan ne sont pas toujours régulières.

Le dual de l'icosaèdre tronqué, le "ballon de football", lui, a toutes ses faces régulières. Ce sont des triangles équilatéraux. Le voici, c'est un *pentakidodécaèdre*



Tous ces beaux polyèdres portent des noms plus ou moins compliqués. Pour voir les solides de Catalan, apprendre leurs noms et quelques-unes de leurs caractéristiques $((s, a, f)$, forme des faces, etc.) on peut par exemple aller sur cette page web :

http ://fr.wikipedia.org/wiki/Solide_de_Catalan

On peut aussi consulter l'encyclopédie *mathworld* de Wolfram, avec comme point d'entrée la page : http ://mathworld.wolfram.com/CatalanSolid.html [5]

5. Il ne faut surtout pas hésiter à voyager dans cette encyclopédie, en suivant les liens suggérés en bas de page sous le titre "SEE ALSO".